

Domini di funzioni reali di variabile reale

Ricordiamo i domini delle funzioni elementari

- Funzione potenza con esponente naturale ($m \in \mathbb{N}$)

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^m \in \mathbb{R}$$

- Funzione potenza con esponente intero negativo

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{x^m} \in \mathbb{R}$$

- Funzione radice n -esima ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

$$x \in [0, +\infty) \mapsto \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty) \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

- Funzione potenza con esponente irrazionale ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

$$x \in (0, +\infty) \mapsto x^\alpha \in (0, +\infty)$$

- Funzione valore assoluto

$$x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in [0, +\infty)$$

- Funzione esponenziale (base $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$)

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$$

- Funzione logaritmica di base a

$$x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$$

- Funzione coseno

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x \in [-1, 1]$$

- Funzione seno

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x \in [-1, 1]$$

- Funzione tangente

$$x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$$

- Funzione cotangente

$$x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\} \mapsto \cot x \in \mathbb{R}$$

- Funzione arcocoseno

$$x \in [-1, 1] \mapsto \arccos x \in [0, \pi]$$

- Funzione arcseno

$$x \in [-1, 1] \mapsto \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Funzione arcotangente

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- Funzione arccotangente

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{arccot} x \in (0, \pi)$$

Es 1 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^4+1}}$

condizioni esistenza
↑

C.E. $\begin{cases} 4x^4+1 \geq 0 \\ \sqrt{4x^4+1} \neq 0 \end{cases}$

condizione esistenza della radice

condizione esistenza del denominatore

$4x^4+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{4x^4+1} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Es 2 $f(x) = \sqrt{\frac{3-|2x+1|}{x-2}}$

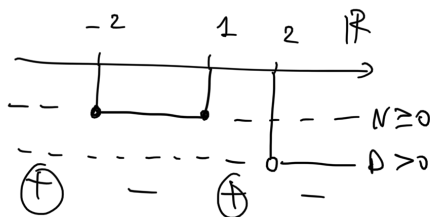
C.E. $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ \frac{3-|2x+1|}{x-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{3-|2x+1|}{x-2} \geq 0 \end{cases}$

Risolviamo la disequazione con lo studio del segno

$N \geq 0 : 3-|2x+1| \geq 0 \Leftrightarrow |2x+1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x+1 \leq 3$

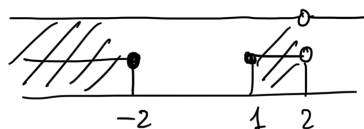
$\Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$

$D > 0 : x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$



Quindi $\frac{3-|2x+1|}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee 1 \leq x < 2$

C.E. $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \leq -2 \vee 1 \leq x < 2 \end{cases}$



$\text{dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [1, 2)$

Es 3 $f(x) = \frac{e^{2x}}{x-1}$

C.E. $x \neq 1$

$\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Es 4 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x^2+1}$

C.E. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$

$\text{dom}(f) = [0, +\infty)$

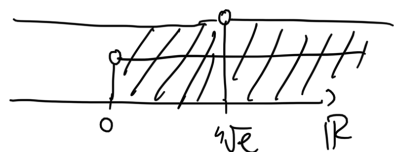
Es 5 $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

C.E. $1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{dom } f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Es 6 $f(x) = \frac{|\log x - 1| - 2}{4 \log x - 1}$

C.E. $\begin{cases} x > 0 \quad (\text{condizione di esistenza di } \log x) \\ 4 \log x - 1 \neq 0 \Rightarrow \log x \neq \frac{1}{4} \Rightarrow x \neq e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e} \end{cases}$



$0 < x < \sqrt[4]{e} \vee x > \sqrt[4]{e}$

$\text{dom}(f) = (0, \sqrt[4]{e}) \cup (\sqrt[4]{e}, +\infty)$

Es 7 $f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

C.E. $x \neq 0$

$\text{dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

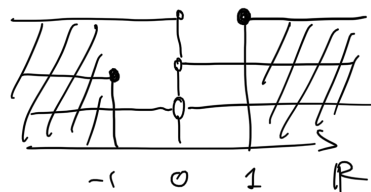
Es 8 $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

C.E. $\begin{cases} x \neq 0 \quad (\text{condizione di esistenza di } \frac{1}{x}) \\ \frac{1}{x} \in [-1, 1] \quad (\text{dominio } \arcsin) \end{cases}$

$$\text{C.E. } \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{x} \geq -1 \\ \frac{1}{x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \\ \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x} \geq 0 \\ \frac{1-x}{x} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq -1 \vee x > 0 \\ x < 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

↑
 Per risolvere le due
 disequazioni si fa lo
 studio del segno!!



$$\text{dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Es 9 $f(x) = \log\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$

$$\text{C.E. } \begin{cases} x^2+2 \neq 0 & \text{condizione di esistenza del quoziente} \\ \frac{3x}{x^2+2} > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$\text{dom}(f) = (0, +\infty)$$

Es 10 $f(x) = \frac{3 - |e^x - 4|}{e^{2x} - 4}$

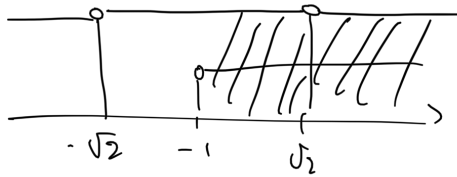
$$\begin{aligned} \text{C.E. } e^{2x} - 4 \neq 0 & \Leftrightarrow e^{2x} \neq 4 \Leftrightarrow 2x \neq \log 4 \\ & \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \log 4 = \log 2 \end{aligned}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\log 2\} = (-\infty, \log 2) \cup (\log 2, +\infty)$$

Es 11 $f(x) = e^{-x} \sqrt{2+x}$ $x \geq -2$ $\text{dom } f = [-2, +\infty)$

Es 12 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-2}$

C.E. $\begin{cases} x \geq -1 & \text{condizione esistenza di } \sqrt{x+1} \\ x^2 - 2 \neq 0 & \Rightarrow x \neq \sqrt{2} \wedge x \neq -\sqrt{2} \end{cases}$



$\text{dom } f = (-1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$