

Numeri complessi

$$z = a + ib$$

a si chiama PARTE REALE di z e si scrive $a = \operatorname{Re}(z)$
 b si chiama PARTE COMPLESSA di z e si scrive $b = \operatorname{Im}(z)$
 i si chiama UNITA' IMMAGINARIA e verifica $i^2 = -1$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{MODULO di } z \quad (\text{è un numero reale } \geq 0)$$

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{CONIUGATO di } z \quad \left(\text{è l'unico numero complesso tali che } \begin{cases} \operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z) \end{cases} \right)$$

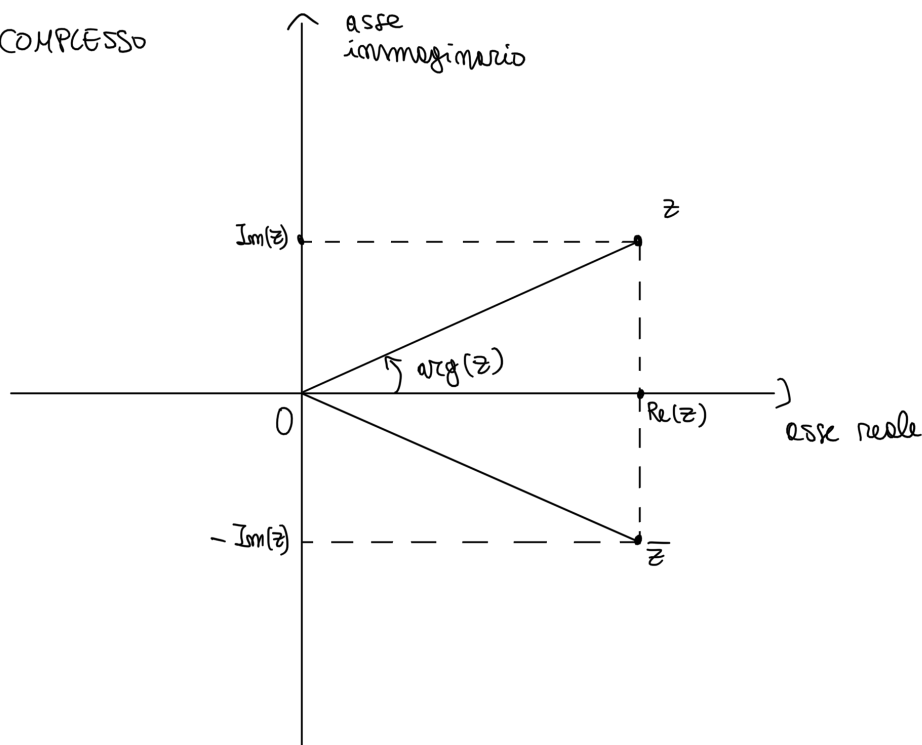
$$\text{Se } \varphi \text{ è un numero reale tali che } \begin{cases} |z| \cos \varphi = a \\ |z| \sin \varphi = b \end{cases}$$

allora φ si chiama ARGOMENTO di z e si denota $\arg(z)$

NB: l'argomento di un numero complesso non è univocamente determinato

Se φ è un argomento di z anche $\varphi + 2k\pi$ sono argomenti di z
con $k \in \mathbb{Z}$ (2π -periodicità delle funzioni $\cos$ e $\sin$)

PIANO COMPLESSO



$\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con le rette euclidee

(a ogni numero reale corrisponde un unico punto della retta e viceversa)

$\mathbb{C}$ è in corrispondenza biunivoca con il piano euclideo

(a ogni numero complesso corrisponde un unico punto del piano e viceversa)

$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ si chiama FORMA ALGEBRICA di z

$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ si chiama FORMA TRIGONOMETRICA di z

Lemma: Utilizzando la definizione di funzione esponenziale nel campo complesso

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta$$

possiamo scrivere i numeri complessi in FORMA ESPONENZIALE, ovvero

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad \text{con } \varphi \text{ argomento di } z$$

Osservazione: Escludendo lo zero (per il quale non è possibile definire l'argomento) tutti i numeri complessi sono univocamente determinati dal modulo e dall'argomento principale, ovvero l'unico argomento nell'intervallo $[0, 2\pi)$.
($\operatorname{Arg}(z)$)

Moltiplicazione e divisione tra numeri complessi in forma trigonometrica

$$\begin{aligned} \text{Siano } z &= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) & \varphi \text{ argomento di } z \\ w &= |w| (\cos \theta + i \sin \theta) & \theta \text{ argomento di } w \end{aligned}$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| (\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta)) \quad \text{MOLTIPLICAZIONE}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|} (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \frac{1}{|z|} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \quad \text{RECIPROCO}$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \theta) + i \sin(\varphi - \theta)) \quad \text{DIVISIONE}$$

Formule di De Moivre

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad m \in \mathbb{N}$$

$$z^m = |z|^m (\cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi))$$

Radici n-esime

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 2$$

Definizione Si chiamano RADICI n-ESIME del numero complesso z tutti e soli i numeri complessi w tali che $z = w^m$

Dato un numero complesso $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($z \neq 0$)

si può dimostrare che z ammette esattamente m radici n-esime distinte

$$w_k = \sqrt[m]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{m} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{m} \right) \right) \quad \text{con } k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

$\uparrow$
radice n-esima
del numero reale non negativo $|z|$

$\uparrow$
al variare di k
in questo insieme
otteniamo le
 m - radici distinte
 $w_0, w_1, \dots, w_{m-1}$

Simulazione quesiti d'esame

Q1 Si consideri il numero complesso $w = \frac{1+9i}{4-5i}$

- Determinare la forma algebrica di w
- Determinare la forma trigonometrica di w
- Calcolare w^3, w^4, w^5
- Calcolare le radici cubiche, seste e decime di w

Svilgimento:

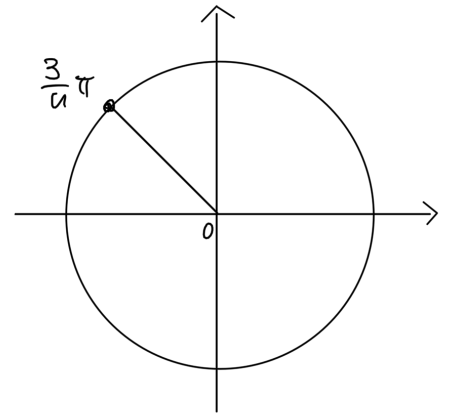
$$\begin{aligned} a) \quad w &= \frac{1+9i}{4-5i} \cdot \frac{4+5i}{4+5i} \\ &= \frac{(1+9i) \cdot (4+5i)}{(4)^2 - (5i)^2} = \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot 5i + 9i \cdot 4 + 9i \cdot 5i}{16 + 25} \\ &= \frac{4 + 5i + 36i - 45}{41} = \frac{-41 + 41i}{41} = -1 + i \quad \text{forma algebrica di } w \end{aligned}$$

$$b) |w| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2} \\ = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcoliamo l'argomento principale di w

$$\begin{cases} \operatorname{Arg}(w) = \varphi \in [0, 2\pi) \\ \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(w)}{|w|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi$$



$$w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \quad \text{forma trigonometrica}$$

$$\begin{aligned} c) w^3 &= (\sqrt{2})^3 \left(\cos \left(3 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(3 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{9}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{9}{4}\pi \right) \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{forma trigonometrica di } w^3 \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2(1+i) = 2+2i \quad \text{forma algebrica di } w^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^3 &= (-1+i)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2 i + 3(-1)i^2 + i^3 = -1 + 3i + 3 - i = 2+2i \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ \boxed{1 \ 3 \ 3 \ 1} \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 10 \ 5 \ 1 \end{array} \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \text{Ternaglie} \qquad \qquad \qquad i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^4 &= (\sqrt{2})^4 \left(\cos (3\pi) + i \sin (3\pi) \right) \\ &= 4 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) \quad \text{forma trigonometrica} \\ &= -4 \quad \text{forma algebrica} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^5 &= (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{15}{4}\pi + i \sin \frac{15}{4}\pi \right) \\ &= (\sqrt{2})^5 \left(\cos \left(3\pi + \frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{7}{4}\pi \right) \right) \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) \quad \text{forma trigonometrica} \end{aligned}$$

d) $w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)$

con z_0, z_1, z_2 denotiamo le radici cubiche di w

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} \right) \right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$= \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right)$$

denotiamo con $z'_0, z'_1, \dots, z'_5$ le radici seste di w

$$z'_k = \sqrt[6]{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$= \sqrt[12]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) \right)$$

denotiamo con $z''_0, z''_1, \dots, z''_9$ le radici decime di w

$$z''_k = \sqrt[20]{2} \left(\cos \left(\frac{3}{40}\pi + k\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{3}{40}\pi + k\frac{\pi}{5} \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, 9$$

Q₂ Si consideri il numero complesso $z = \frac{-27 - 9i}{2i^8 + i^3 + 2i^5 + i^{-4}}$

- Determinare la forma algebrica di z
- Determinare la forma trigonometrica di z
- Calcolare le radici quadrate, cubiche e quarte di z , scrivendole esplicitamente in forma algebrica

asserzioni:

$i^0 = 1$	
$i^1 = i$	$i^5 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$

Come calcoliamo in generale le potenze di i ?

$$i^K = i^r \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

dove r è il resto della divisione $K:4$

Cioè $K = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quoziente}}}{h} \cdot 4 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{resto}}}{r}$

$$\begin{aligned} i^K &= i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r \\ &= (i^4)^q \cdot i^r \\ &= 1^q \cdot i^r = i^r \end{aligned}$$

Esempio $K = 1003$

$$\begin{array}{r|l} 1003 & 4 \\ \hline 8 & 205 \rightarrow \text{quoziente} \\ \hline 203 & \\ 0 & \\ \hline 203 & \\ 200 & \\ \hline 3 & \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

$$1003 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quoziente}}}{h} \cdot 205 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{resto}}}{3} \Rightarrow i^{1003} = i^3 = -i$$

$$\begin{aligned} i^{-K} &= \left(\frac{1}{i}\right)^K = (-i)^K = (-1)^K i^K \quad \forall K \in \mathbb{N} \\ &\uparrow \\ i^{-r} &= \frac{1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = -i \end{aligned}$$

Svolgimento Q₂

$$a) \quad z = \frac{-27 - 9i}{2i^8 + i^3 + 2i^5 + i^{-4}}$$

$$= \frac{-9(3+i)}{2-1+2i+1} = \frac{-9(3+i)}{3+i}$$

$$= -9$$

forma algebrica di z

$$b) \quad |z| = \sqrt{(-9)^2 + 0^2} = \sqrt{81} = 9 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valore} \\ \text{assoluto}}}{|-9|}$$

$$\begin{cases} \varphi = \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi) \\ \cos \varphi = \frac{\text{Re}(z)}{|z|} = -1 \\ \sin \varphi = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$z = 9 (\cos \pi + i \sin \pi) \quad \text{rappresentazione trigonometrica}$$

c) Determiniamo w_0, w_1 le radici quadrate di z

$$w_k = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right) \quad k=0,1$$

$$w_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3i$$

$$w_1 = 3 \left(\cos \left(\frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{2}\pi \right) \right) = -3i$$

Determiniamo w'_0, w'_1, w'_2 le radici cubiche di z

$$w'_k = \sqrt[3]{9} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right) \quad k=0,1,2$$

$$w'_0 = \sqrt[3]{9} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{9} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} + \frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{3}}{2}i$$

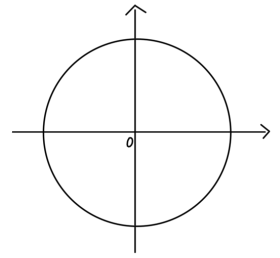
$$w'_1 = \sqrt[3]{9} \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = -\sqrt[3]{9} \rightarrow \text{radice cubica reale di } -9$$

$$w'_2 = \sqrt[3]{9} \left(\cos \left(\frac{5}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{3}\pi \right) \right) = \sqrt[3]{9} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} - \frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{3}}{2}i$$

Dimostriamo con $w_0'', w_1'', w_2'', w_3''$ le radici quarte di z

$$w_k'' = \sqrt[4]{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad k=0,1,2,3$$

$$\begin{aligned} w_0'' &= \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt[4]{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2}}{2} (1+i) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} (1+i) \end{aligned}$$



$$w_1'' = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} (-1+i)$$

$$w_2'' = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} (1+i)$$

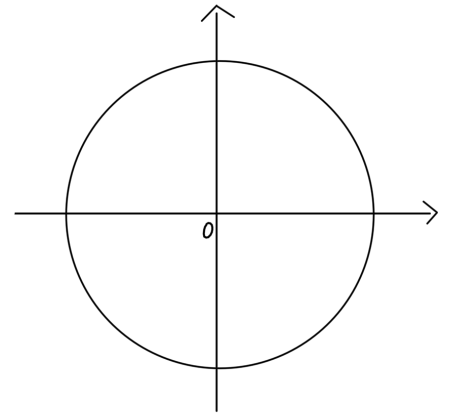
$$w_3'' = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} (1-i)$$

Q3 Si consideri il numero complesso $w = \frac{4}{i - \sqrt{3}}$

- Determinare la forma algebrica di w
- Determinare la forma trigonometrica di w
- Calcolare w^7, w^{100}
- Calcolare le radici quarte e le radici tredicesime di w

Sviluppiamenti:

$$\begin{aligned} a) \quad w &= \frac{4}{i - \sqrt{3}} \cdot \frac{-i - \sqrt{3}}{-i - \sqrt{3}} \\ &= \frac{-4i - 4\sqrt{3}}{-i^2 + 3} = \frac{-4i - 4\sqrt{3}}{4} \\ &= -\sqrt{3} - i \quad \text{forma algebrica} \end{aligned}$$



$$b) \quad |w| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Chiamiamo } \varphi = \text{Arg}(w) \quad & \begin{cases} \varphi \in [0, 2\pi) \\ \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{7}{6}\pi \end{aligned}$$

$$w = 2 \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right)$$

$$\begin{aligned} c) \quad w^7 &= 2^7 \left(\cos \left(\frac{49}{6}\pi \right) + i \sin \left(\frac{49}{6}\pi \right) \right) \\ &= 2^7 \left(\cos \left(8\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(8\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= 2^7 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{100} &= 2^{100} \left(\cos \left(\frac{700}{6}\pi \right) + i \sin \left(\frac{700}{6}\pi \right) \right) \\ &= 2^{100} \left(\cos \left(116\pi + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(116\pi + \frac{2}{3}\pi \right) \right) \\ &= 2^{100} \left(\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 700 & 6 \\ \hline 6 & 116 \\ \hline 10 & \\ \hline 6 & 40 \\ \hline 6 & 36 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$$d) \quad w = 2 \left(\cos \frac{7}{6} \pi + i \sin \frac{7}{6} \pi \right)$$

Chiamiamo $z_0, z_1, \dots, z_4$ le radici quinte di w

$$z_k = \sqrt[5]{2} \left(\cos \left(\frac{7}{30} \pi + \frac{2}{5} k \pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{30} \pi + \frac{2}{5} k \pi \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

Chiamiamo $z'_0, z'_1, \dots, z'_{12}$ le radici tredicesime di w

$$z'_k = \sqrt[13]{2} \left(\cos \left(\frac{7}{78} \pi + \frac{2}{13} k \pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{78} \pi + \frac{2}{13} k \pi \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, 12$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Sia $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$

un'equazione a coefficienti complessi di grado n (cioè $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_0 \neq 0$).

Allora questa equazione ammette esattamente n radici complesse contate con le rispettive molteplicità.

Equivalentemente, se $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$

è un polinomio di grado n a coefficienti complessi (cioè $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_0 \neq 0$),

allora esistono $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (non necessariamente distinti) tali che

$$p(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Esempio $z^6 + 1 = 0$ non ammette soluzioni reali

Tuttavia abbiamo visto che essa ammette esattamente sei radici complesse, le quali sono le radici complesse sesta di -1

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

Denotiamo $z_0, z_1, \dots, z_5$ le radici sesta di -1

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

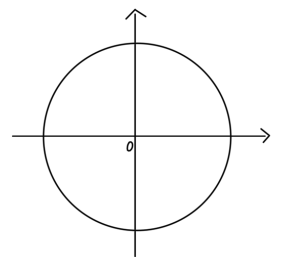
$$z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$z_5 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$



$$\overline{z_0} = z_5$$

$$\overline{z_1} = z_4$$

$$\overline{z_2} = z_3$$

È una cosa sorprendente? NO!!

Teorema delle radici complesse coniugate

Sia $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ un'equazione a coefficienti reali di grado n (cioè, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$).

Se $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di tale equazione allora anche $\bar{z}_0$ è radice.

Equivalentemente, sia $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ un polinomio a coefficienti reali di grado n , ovvero $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$, se $p(z_0) = 0$ per qualche $z_0 \in \mathbb{C}$ allora $p(\bar{z}_0) = 0$.

Corollario

Sia $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ un polinomio a coefficienti reali di grado n con n numero dispari, allora esiste almeno una radice reale di p , cioè $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(x_0) = 0$.

Esempio le equazioni di secondo grado a coefficienti reali

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{non ammettono radici reali quando } \Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Possiamo tuttavia calcolarne le radici complesse

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{calcolando le radici quadrate complesse di } \Delta$$

Scriviamo Δ in forma trigonometrica

$$\begin{array}{ccc} |\Delta| & = & |\Delta| = -\Delta \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{modulo} & & \text{valore assoluto} \end{array}$$

$$\Delta = -|\Delta| (\cos \pi + i \sin \pi)$$

denotiamo π_0, π_1 le radici quadrate complesse di Δ

$$\pi_k = \sqrt{-\Delta} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \right) \quad k=0,1$$

$$\pi_0 = i\sqrt{-\Delta}$$

$$\pi_1 = -i\sqrt{-\Delta}$$

Le radici complesse dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Osserviamo che $\bar{z}_1 = z_2$, ovvero un'equazione di secondo grado a coefficienti reali con discriminante negativo ammette sempre radici complesse coniugate

Esempio le equazioni di 2° e coefficienti complessi:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{C} \quad \text{e } a \neq 0$$

si risolvono con la stessa formula risolutiva usata nel caso reale

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ma $\sqrt{\Delta}$ denota le radici quadrate in senso complesso
(due sono esattamente opposte se $\Delta \neq 0$)

e la divisione per $2a$ va intesa in senso complesso

(si moltiplica numeratore e denominatore per il coniugato di $2a$)

Esercizio $4z^2 - 4z + 3 - 2\sqrt{3}i = 0$

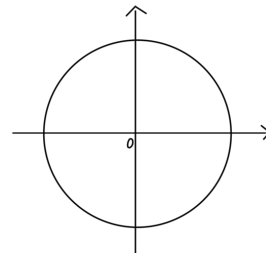
$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (3 - 2\sqrt{3}i) = 16 - 16(3 - 2\sqrt{3}i) \\ &= 16(1 - 3 + 2\sqrt{3}i) = 16(-2 + 2\sqrt{3}i) \\ &= 64\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

$$|\Delta| = 64 \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 64$$

Determiniamo $\text{Arg}(\Delta) = \varphi$

$$\begin{cases} \varphi \in [0, 2\pi) \\ \cos \varphi = \frac{\text{Re}(\Delta)}{|\Delta|} = -\frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\text{Im}(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$



Calcoliamo le radici quadrate complesse di Δ (due diametri π_0, π_1)

$$\pi_k = \sqrt[4]{|\Delta|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + k\pi\right) \right) \quad k=0,1$$

$$\pi_0 = \sqrt[4]{64} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4(1 + \sqrt{3}i)$$

$$\pi_1 = \sqrt[4]{64} \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \sin\frac{4}{3}\pi \right) = -4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -4(1 + \sqrt{3}i)$$

7

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm 1(1 + \sqrt{3}i)}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i) \begin{matrix} \swarrow 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \searrow -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{matrix}$$