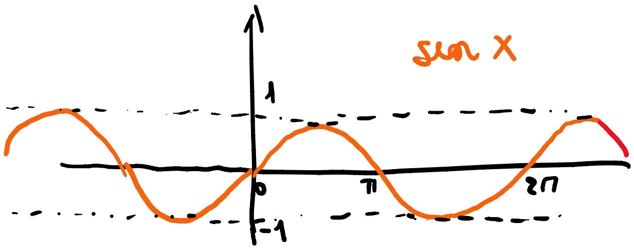
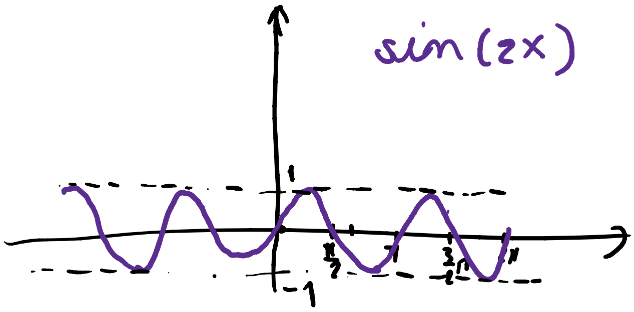
LEZIONE 10

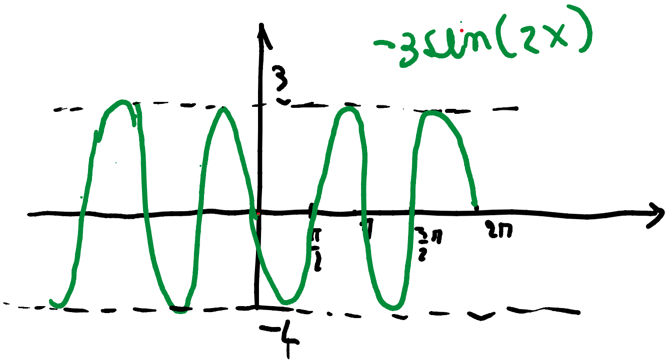
lunedì 24 ottobre 2022 09:02

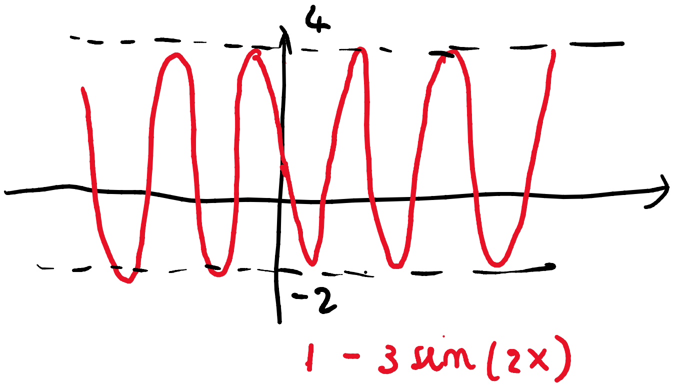
Disegnamo il grafico della funzione:

$f(x) = 1 - 3\sin(2x)$









NUMERI COMPLESSI

Sappiamo che l'equazione $x^2 + a = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$ se $a > 0$

Introduciamo un nuovo numero i (UNITÀ IMMAGINARIA) che soddisfa $i^2 = -1$. In questo modo, se $a > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + a &= x^2 + (\sqrt{a})^2 = x^2 - (-1)\sqrt{a}^2 \\ &= x^2 - i^2(\sqrt{a})^2 = x^2 - (i\sqrt{a})^2 \\ &= (x + i\sqrt{a})(x - i\sqrt{a}) \end{aligned}$$

Le soluzioni di $x^2 + a = 0$ con $a > 0$ sono $-i\sqrt{a}$ e $i\sqrt{a}$.

Def: Un NUMERO COMPLESSO è un numero della forma
$x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$
Il numero x si dice PARTE REALE di $x+iy$ $(\mathrm{Re}(x+iy) = x)$
Il numero y si dice PARTE IMMAGINARIA di $x+iy$ $(\mathrm{Im}(x+iy) = y)$

Notazione: L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$. Si ha quindi:

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1 \}$$

ESEMPI

- $z = 2 + 3i$
  $\mathrm{Re}(z) = 2$
  $\mathrm{Im}(z) = 3$

- $z = 2i = 0 + 2i$
  $\mathrm{Re}(z) = 0$
  $\mathrm{Im}(z) = 2$

OSS

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ infatti:

$$\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \}$$

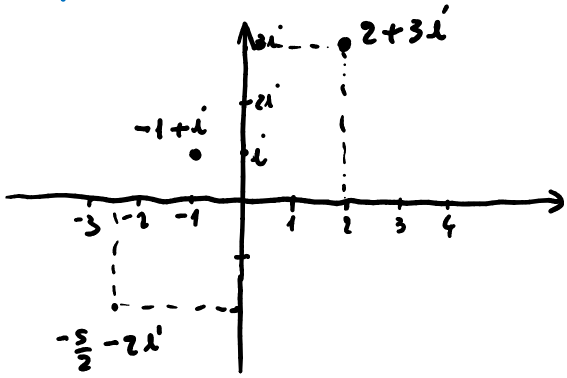
OSS 2

Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha che:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$$

Più in generale ogni uguaglianza tra numeri complessi è equivalente a un sistema di due equazioni tra numeri reali.

OSS I numeri complessi si possono rappresentare su un piano (PIANO COMPLESSO) identificando $x+iy$ con la coppia (x,y)



L'asse x si chiama ASSE REALE
L'asse y si chiama ASSE IMMAGINARIO

Operazioni tra numeri complessi

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ della forma $z_1 = x_1 + i y_1$ e $z_2 = x_2 + i y_2$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Definiamo:

$$z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 := x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

OSS Queste definizioni sono naturali:

- $x_1 + i y_1 + x_2 + i y_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
- $(x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$
  $= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - y_1 y_2$
  $= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

ESEMPIO

$$(2-i)(4+3i) = 8 + 6i - 4i - 3i^2$$
$$= 11 + 2i$$

$$i(4-i) = 4i - i^2 = 4i + 1 = 1 + 4i$$

Si può verificare che valgono le stesse proprietà delle operazioni tra numeri reali. In particolare:

- Vale la legge di annullamento del prodotto.
- Ogni $z \in \mathbb{C}$ ha un opposto $-z$.
  se $z = x + iy$ allora
  $$-z = -x - iy$$
- Ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ha un reciproco $\frac{1}{z}$
  $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = ?$ e $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = ?$

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Definiamo **MODULO** di z la quantità:
$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Definiamo **CONIUGATO** di z il numero complesso
$$\bar{z} := x - iy = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$$

OSS
$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2$$
$$= x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$
$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Conseguenza
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$
quindi
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$$

ESERCIZIO

Sia $z = \dfrac{2+i}{4+3i}$ determinare $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$.

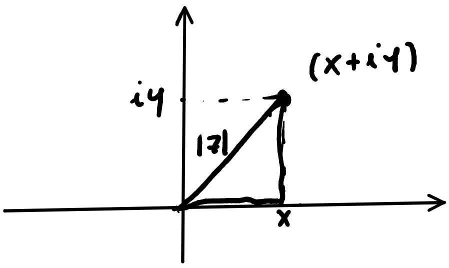
Idea: moltiplichiamo e dividiamo per $4-3i$

$$z = \frac{(2+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{8-6i+4i-3i^2}{16-(3i)^2}$$

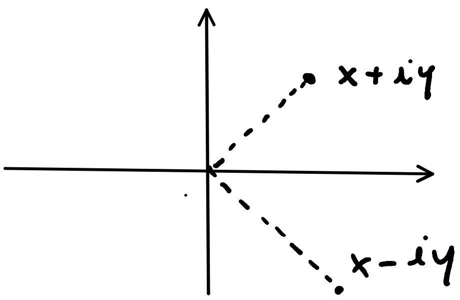
$$= \frac{11-2i}{16+9} = \frac{11-2i}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{11}{25}$ e $\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{2}{25}$

Commenti su modulo e coniugato:



$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ rappresenta la distanza di z da 0 sul piano complesso



$\bar{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale.

PROPRIETÀ

1) $|z| \in \mathbb{R}$
2) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0$
3) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ e $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (se $z_2 \neq 0$)
4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ e $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
5) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (e $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$)

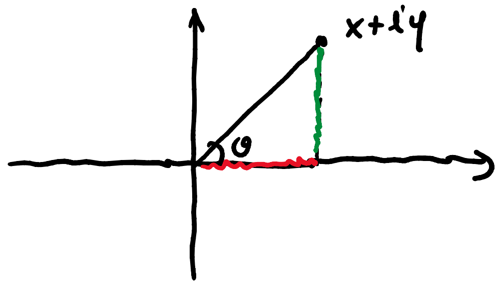
6) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ $\quad \left(e \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ se } z_2 \neq 0 \right)$

7) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

8) $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = \overline{z}$

La rappresentazione $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si dice FORMA ALGEBRICA (O CARTESIANA) del numero complesso z.

Rappresentazione polare (o trigonometrica)



$$x = |z| \cos\theta$$
$$y = |z| \sin\theta$$

Il numero complesso z si scrive nella forma
$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$

Questo tipo di rappresentazione si chiama FORMA POLARE (O FORMA TRIGONOMETRICA) di z

L'angolo θ si dice ARGOMENTO di z.

Attenzione:

- L'argomento di z è definito a meno di aggiungere multipli interi di 2π (se $z \neq 0$)
- Se $z = 0$ l'argomento non è definito.
- L'argomento di un numero complesso si indica con $\arg(z)$
- Se $z \neq 0$, si definisce ARGOMENTO PRINCIPALE di z l'unico angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ per cui vale la rappresentazione

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. L'argomento principale si indica con $\mathrm{Arg}(z)$.

OSS 1

1) Se $z \neq 0$, $\mathrm{Arg}(z)$ è l'unico angolo che soddisfa

$$\begin{cases} \mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi) \\ \cos(\mathrm{Arg}(z)) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin(\mathrm{Arg}(z)) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

2) Se $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } y \geq 0,\ x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{se } x > 0,\ y \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0\ \ y < 0 \end{cases}$$

Idea:

$z = x + iy$

$$\begin{aligned} x &= |z|\cos\varphi \\ y &= |z|\sin\varphi \end{aligned} \iff \frac{y}{x} = \tan\varphi$$

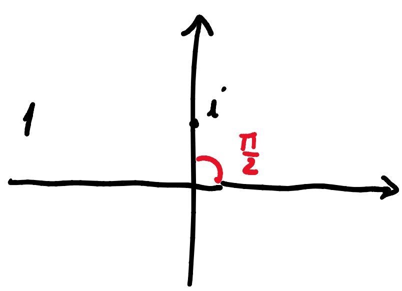
ESEMPIO

1) $z = i$

$\mathrm{Re}(z) = 0 \qquad \mathrm{Im}(z) = 1$

$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

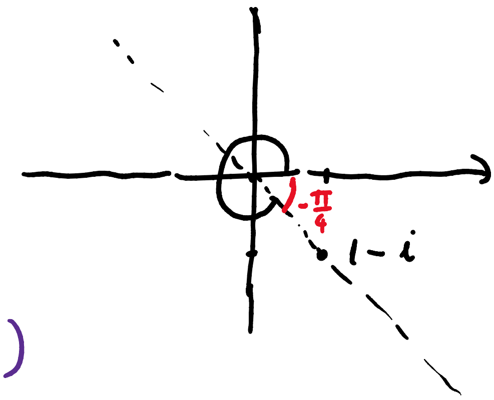
$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$



$\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$

Forma trigonometrica di i: $\quad i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

2) $z = 1 - i$



$\mathrm{Re}(z) = 1$

$\mathrm{Im}(z) = -1$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = -\frac{\pi}{4} \quad (+2k\pi, \; k \in \mathbb{Z})$

$\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$

$\left(\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } \operatorname{sen}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \iff \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$

Forma trigonometrica: $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

OSS

Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si ha che:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2) \end{cases}$$

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Siano φ_1, φ_2 tali che:

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

allora:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$
$$= |z_1||z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1))$$
$$= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2))$$

PROPRIETÀ

1) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
2) $\forall n \in \mathbb{N}: \arg(z^n) = n \arg(z)$
3) $\forall n \in \mathbb{N}: z^n = |z|^n(\cos(n\arg(z)) + i\,\mathrm{sen}(n\arg(z)))$
4) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

ESEMPIO

$z = 1 + \sqrt{3}\,i$

Calcolare z^9.

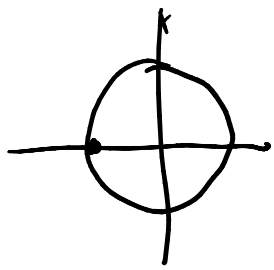
$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Per trovare l'argomento di z cerchiamo un angolo θ tale che $\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$

e $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

quindi $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$z^9 = 2^9\left(\cos\left(9\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(9\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2^9(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi))$$
$$= 2^9(-1 + 0)$$
$$= -2^9$$



Notazione

Dato un angolo φ definiamo $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$

In questo modo il numero complesso $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ si può scrivere come $z = |z| e^{i\varphi}$

$$(|z| e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

la rappresentazione $z = |z| e^{i\arg(z)}$ si dice FORMA ESPONENZIALE (O DI EULERO) di z.

Radici complesse di numeri complessi

Def. Sia $w \in \mathbb{C}$, le RADICI N-ESIME COMPLESSE di w sono i numeri complessi z tali che $z^n = w$.

ESEMPIO

$w = 1 - \sqrt{3}\, i$

cerchiamo le radici quadrate di w.

$$z^2 = w$$

$$\left(|z| e^{i\arg(z)}\right)^2 = |w| e^{i\arg(w)}$$

$$|z|^2 e^{i\,2\arg(z)} = |w| e^{i\arg(w)}$$

$$\begin{cases} |z|^2 = |w| \\ 2\arg(z) = \arg(w) + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{|w|} \\ \arg(z) = \dfrac{\arg(w)}{2} + k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$w = 1 - \sqrt{3}\, i$

$|w| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$

Le radici quadrate di w sono i numeri della forma

$$z = \sqrt{|w|}\, e^{i\left(\frac{\arg(w)}{2} + k\pi\right)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Se $k=0$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

se $k=1$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Gli altri valori di k ci danno sempre uno di questi due valori.

Regola generale per trovare le radici n-esime

Per trovare le radici n-esime di $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$:

1) Rappresentare w in forma esponenziale o trigonometrica
2) Le radici n-sime di w sono i numeri della forma

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\arg w}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

In particolare un numero complesso $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ha esattamente n radici n-sime complesse.