LEZIONE 1

lunedì 4 ottobre 2021 08:51

INFORMAZIONI GENERALI

Gabriele Mancini
gabriele.mancini@uniba.it

Alessandro Palmieri
alessandro.palmieri@uniba.it

Dipartimento di Matematica
ufficio: terzo piano, stanza 15 (temporaneo)

Ricevimento: lunedì 14:30 - 16:30

Pagina web: https://www.dm.uniba.it/members/mancini

Canale teams del corso: codice **i6hfurs**

Tutor:
Margherita D'Alessandro
m.dalessandro51@studenti.uniba.it
lunedì e mercoledì 14:00 - 17:00
Canale teams del tutorato: codice **6sap0qi**

Esame

- Prova scritta (calendario indicato sulla pagina del dipartimento)
- Prova orale (qualche giorno dopo la prova scritta)

Programma del corso:

1. Richiami:
   - Insiemi e Logica
   - Numeri (insiemi numerici)
   - Equazioni e disequazioni
   - Funzioni

2. Funzioni di una variabile

   - funzioni reali di variabile reale:
     - Limiti
     - Continuità
     - Derivabilità e calcolo differenziale
     - Grafici di funzioni
     - Ottimizzare funzioni (trovare massimi e minimi)
     - Calcolo integrali

   - successioni:
     - limiti di successioni
     - Serie numeriche (somme di infiniti termini)

3. Equazioni differenziali

4. Funzioni di più variabili (cenni)

Libro consigliato:

BERTSCH, DALL'AGLIO, GIACOMELLI - Epsilon 1, primo corso di analisi matematica

INSIEMI E LOGICA:

Def: Un INSIEME è una qualsiasi collezione di oggetti chiamati ELEMENTI dell'insieme.

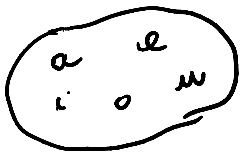
ESEMPI

- $A := \{1, 11, 14, -3\} = \{-3, 11, 1, 14\}$

  definizione — uguale

- $B := \{a, e, i, o, u\}$

  $= \{\text{vocali dell'alfabeto}\}$



Numeri naturali $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

- $C := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$

  appartiene — tale che (anche: o t.c.)

  $= \{x \mid x \text{ è un numero naturale pari}\}$

  $= \{0, 2, 4, 6 \dots\}$

  $= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Simboli utili:

- $\in$ appartiene ($14 \in C$)
- $\notin$ non appartiene ($1 \notin C$)
- $\emptyset$ insieme vuoto

- $\subseteq$ (simbolo di inclusione):

$A \subseteq B$ si legge: A è contenuto in B

vuol dire: ogni elemento di A appartiene a B.

Ad esempio:

$C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$

$\{2, 14, 16\} \subseteq C$.

- $A \nsubseteq B$ (A non è contenuto in B)
cioè esiste un elemento di A che non appartiene a B.

- $A \subsetneq B$ inclusione stretta
vuol dire $A \subseteq B$ e $A \neq B$

Simboli quantificatori:

$\forall$ ogni (o "per ogni")

$\exists$ esiste

$\nexists$ non esiste

$\exists!$ esiste ed è unico.

Simboli logici

$\Longrightarrow$ implica

$\not\Longrightarrow$ non implica

$\Longleftrightarrow$ se e solo se (si usa per dire che due affermazioni sono equivalenti)

$\wedge$ e (congiunzione logica)

$\vee$ o (disgiunzione logica)

$\neg$ negazione logica

ESEMPI

- Sia $x \in \mathbb{N}$;

  $\neg$ (x è pari) $\iff$ x è dispari

- Ogni numero multiplo di 4 è pari.

  $\forall x \in \mathbb{N}$ t.c. x è multiplo di 4 : x è pari
  si ha che

  $\forall x \in \mathbb{N}$: x multiplo di 4 $\implies$ x è pari.

- Sia $x \in \mathbb{N}$

  $\neg$ (x è pari $\vee$ x è multiplo di 3)

  $\iff$ ($\neg$ (x è pari)) $\wedge$ ($\neg$ (x è multiplo di 3))

  $\iff$ x è dispari $\wedge$ x non è multiplo di 3.

- Siano $a, b \in \mathbb{N}$:

  a è pari $\wedge$ b è pari $\implies$ $a + b$ è pari

  a è pari $\vee$ b è pari $\not\Rightarrow$ $a + b$ è pari

  ($a = 2$ $b = 3$ $a + b = 5$)

  a è pari $\vee$ b è pari $\implies$ $a \cdot b$ è pari

Def Siano A, B due insiemi. Si dice che A è un **SOTTOINSIEME** di B se $A \subseteq B$.

$(\forall x \in A : x \in B)$

$(x \in A \Rightarrow x \in B)$

OSS

Siano A e B due insiemi:

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

$A \neq B \iff A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A$

Operazioni elementari tra insiemi

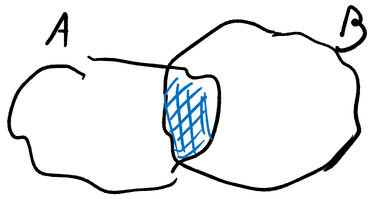
Def Siano A, B due insiemi. Definiamo:

1) **UNIONE** tra A e B l'insieme

$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

2) **INTERSEZIONE** tra A e B l'insieme:

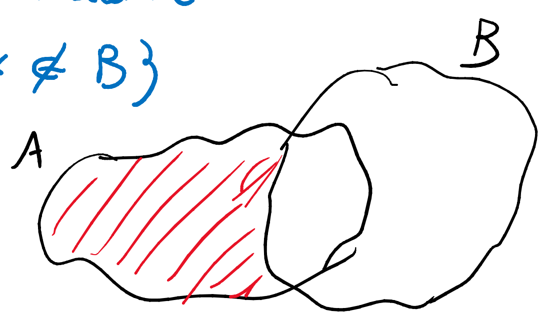
$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



4) **DIFFERENZA** tra A e B l'insieme

$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

(si legge: A meno B)



ESEMPI

$A = \{1, 14, 18\}$

$B = \{14, 20, -15, 10, 18, a\}$

$A \cup B = \{1, 14, 18, 20, -15, 10, a\}$

$A \cap B = \{14, 18\}$

$B \setminus A = \{20, -15, 10, a\}$

$A \setminus B = \{1\}$ (1 è diverso da $\{1\}$)

Def: Siano A e X due insiemi con $A \subseteq X$. Si dice COMPLEMENTARE di A in X l'insieme

$$\mathcal{C}_X(A) := \{x \in X \mid x \notin A\} = X \setminus A$$

Nota: Se $X = \mathbb{R}$ il complementare di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si indica anche con A^c o con $\mathcal{C}(A)$.

ESEMPI

- $X = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

  $A = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$

  $\mathcal{C}_A(X) = \{2, 6, 10, 14 \ldots\ldots\}$

  $= \{4n + 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

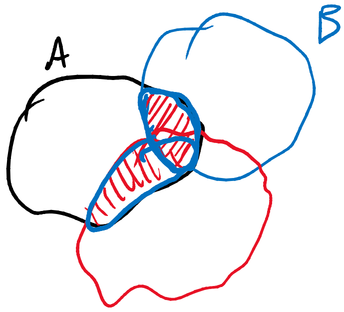
- Se $X = \mathbb{N}$

  $A = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$

  $\mathcal{C}_X(A) = \{1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7, \ldots\ldots\}$

PROPRIETÀ

Siano A, B, C tre insiemi:



1) $A \cup B = B \cup A$

2) $A \cap B = A \cap B$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5) Se $A, B \subseteq C$ allora

$$\mathcal{C}_C(A \cup B) = \mathcal{C}_C(A) \cap \mathcal{C}_C(B)$$

e $$\mathcal{C}_C(A \cap B) = \mathcal{C}_C(A) \cup \mathcal{C}_C(B).$$

Def: Siano A, B due insiemi, definiamo PRODOTTO CARTESIANO di A e B l'insieme

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

ESEMPI

$A = \{1, 3\}$

$B = \{4, b, -1\}$

$A \times B = \{(1,4), (1,b), (1,-1), (3,4), (3,b), (3,-1)\}$

Insiemi Numerici:

1) $\mathbb{N}$: insieme dei NUMERI NATURALI:

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$

In $\mathbb{N}$ si possono fare somme e prodotti ma non sottrazioni e quozienti.

2) $\mathbb{Z}$ insieme dei NUMERI INTERI (RELATIVI)

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$

In $\mathbb{Z}$ si possono fare le differenze ma non si possono fare i quozienti.

L'equazione $4x = 1$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$

3) $\mathbb{Q}$ insieme dei NUMERI RAZIONALI

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge \underline{b \neq 0} \}$

Operazioni tra frazioni:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(In particolare: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$)

Attenzione:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \;?$$

Evitiamo di usare questa scrittura! Una delle linee di frazione deve essere più lunga per distinguere tra:

- $$\frac{\;\frac{a}{b}\;}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

- $$\frac{a}{\;\frac{b}{c}\;} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Ad esempio:

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{\frac{2}{1}}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Attenzione: La rappresentazione di un numero come frazione non è unica

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Attenzione:

$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$ mai scrivere l'=

$$\frac{1}{2+3} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Possiamo dire che

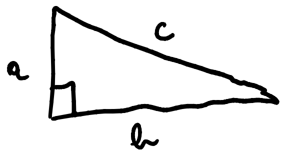
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \text{M.C.D}(a,b) = 1 \right.$$

più grande divisore comune di a e b.

Fatto: Aggiungendo le condizioni $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\text{M.C.D}(a,b)=1$ la rappresentazione di un numero razionale come frazione diventa unica.

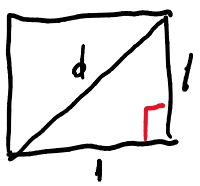
Teorema di Pitagora:

Triangolo rettangolo



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Quadrato di lato 1:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

TEOREMA:

$\nexists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

DIM

E' una dimostrazione per assurdo.

Assumiamo che $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

Sappiamo che $q = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $M.C.D(a,b) = 1$

$$q^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \quad (*)$$

$\Rightarrow a^2$ e' pari $\Rightarrow a$ e' pari.

$\Rightarrow \exists\, K \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2K$. $(*)$

Troviamo che $(2K)^2 = 2b^2$

$$4K^2 = 2b^2$$

$$2K^2 = b^2$$

allora b^2 e' pari $\Rightarrow b$ e' pari.

Abbiamo fatto vedere che a e b sono pari e questo contraddice il fatto che $M.C.D(a,b) = 1$. $\square$

Il fatto che la diagonale di un quadrato di lato unitario non possa essere misurata con numeri razionali suggerisce l'esistenza di altri numeri

C'è un altro indizio:

I numeri razionali si possono scrivere come numeri decimali (numeri con la virgola)

- $\frac{1}{2} = 0,5$
- $\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 0,3333333\ldots\ldots$
- $\frac{113}{50} = 2,26$

$$
\begin{array}{r|l}
113 & 50 \\
\underline{100} & \overline{2,26} \\
130 & \\
\underline{100} & \\
300 & \\
\underline{300} & \\
0 &
\end{array}
$$

- Provando a usare lo stesso procedimento per $\frac{1}{3}$ troviamo che:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 3 \\
\underline{0} & \overline{0,333333\ldots} \\
10 & \\
\underline{9} & \\
10 & \\
\underline{9} & \\
10 & \\
\vdots &
\end{array}
$$

- $\frac{2}{15} = 0{,}1\overline{3}$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 15 \\ \underline{15} & \overline{0{,}13\ldots} \\ 50 & \\ \underline{45} & \\ 5 & \end{array}$$

- $2{,}1\overline{45} = 2{,}145454545\ldots$

Fatto:
Si può dimostrare che la scrittura decimale di un numero razionale è o finita o periodica

Il numero:

$0{,}12112111211112\ldots$

non è finito né periodico quindi non può essere un numero razionale!

Numeri Reali:

$$\mathbb{R} := \{ n, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \mid n \in \mathbb{Z},\ a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\} \}$$

OSS

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Proprietà della somma:

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (prop. commutativa)
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$ (prop. associativa)
3) $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$

4) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a + (-a) = 0$

Proprietà della moltiplicazione: $(a \cdot b \sim ab)$

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad ab = ba$
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a(bc) = (ab)c$
3) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 1 = a$
4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$
5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (ab + ac)$

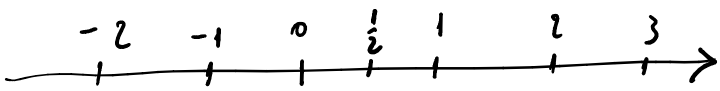
$$\boxed{\begin{aligned} -(3x+1) &= (-1)\cdot(3x+1) \\ &= (-1)\cdot(3x) + (-1)\cdot 1 \\ &= -3x - 1 \\ x^2 + x &= x(x+1) \end{aligned}}$$

6) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 0 = 0$

7) LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:
$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad ab = 0 \iff a = 0 \lor b = 0$

- **Ordinamento dei numeri reali:**

I numeri reali sono ordinati e si possono rappresentare tramite una retta:



Inoltre valgono le seguenti proprietà:

1) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \leq a$
2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \land b \leq a \iff a = b$

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \ \wedge \ b \leq c \implies a \leq c$

4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \iff a + c \leq b + c$

$x + 1 = 3$	$x + 1 \leq 3$
$x + 1 - 1 = 3 - 1$	$x \leq 3 - 1$
$x = 2$	$x \leq 2$

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$

$a \leq b \ \wedge \ c \geq 0 \implies ac \leq bc$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$

$a \leq b \ \wedge \ c < 0 \implies ac \geq bc$

- $2 \leq 4 \xRightarrow{\cdot 3} 6 \leq 12$

  $\xRightarrow{\cdot(-3)} -6 \geq -12$

- $-2x \geq 1 \iff x \leq -\frac{1}{2}$

  $3x \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{3}$

> Ricordate di cambiare verso alla disuguaglianza se moltiplicate o dividete per numeri negativi

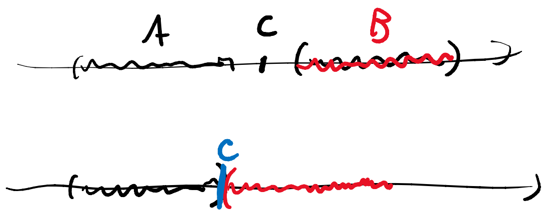
- <u>Proprietà di continuità di $\mathbb{R}$</u> (o prop. di Dedekind).

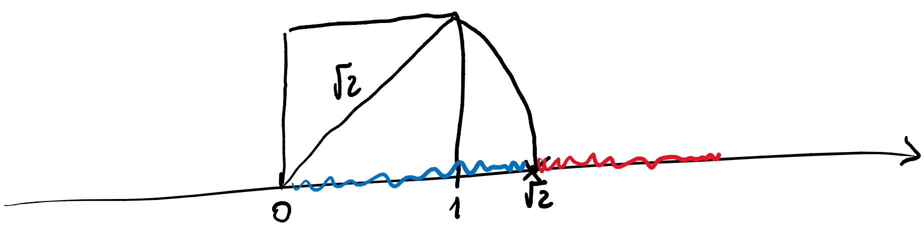
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e

$\forall a \in A, b \in B: \quad a \leq b$..

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$\forall a \in A, b \in B: \quad a \leq c \ \wedge \ c \leq b$





> L'insieme dei numeri razionali non soddisfa la proprietà di continuità

- **Proprietà di Archimede:**

$\forall\, x \in \mathbb{R} \ \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > x$.

Conseguenza

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0 : \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}$ t.c. $0 < \varepsilon < x$.

- **Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.**

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$: $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $a < q < b$

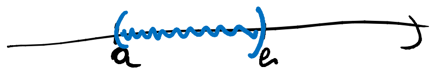
- **Intervalli:**

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ denotiamo:

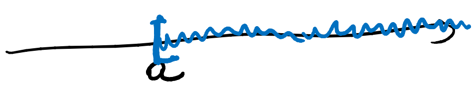
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(Attenzione: $[a,b] = \emptyset$ se $b < a$)

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ il MASSIMO di A è il più grande degli elementi di A (e si indica con $\max A$)

Nota: In modo simile il MINIMO di A è il più piccolo dei suoi elementi (si indica con $\min A$)

OSS

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$: $\quad x = \max A \iff x \in A \wedge \forall a \in A: x \geq a$

ESEMPI

- $A = \{-1, 14, 7\}$

  $\max A = 14$

- $B = \{-17, -14, -3\}$

  $\max B = -3$

- $C = [2, 3]$

  $\max C = 3$

- $D = (2, 3)$

  $\max D$ non esiste!

- $E = (3, +\infty)$

  $\max E \nexists$

Def: Sia A un insieme e sia $x \in \mathbb{R}$. Si dice che x è un MAGGIORANTE per A se $\forall a \in A: x \geq a$.

ES:

$A = \{-1, 14, 7\}$

100 è un maggiorante

15 è un maggiorante

14 è un maggiorante

Notazione: L' insieme dei maggioranti di un insieme A si indica con $\mathcal{M}(A)$.

ESEMPI

$A = \{-1, 14, 7\}$
$\mathcal{M}(A) = [14, +\infty)$

$B = (2, 3)$
$\mathcal{M}(B) = [3, +\infty)$

$C = (2, +\infty)$
$\mathcal{M}(C) = \emptyset$ non esistono maggioranti

Def Si dice che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è LIMITATO SUPERIORMENTE se $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$ (cioè se $\exists$ almeno un maggiorante)

ESEMPI

- $(2, 3)$ è superiormente limitato
- $(2, +\infty)$ non è superiormente limitato.

TEOREMA (TEOREMA DI ESISTENZA DELL' ESTREMO SUPERIORE)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \neq \emptyset \wedge \mathcal{M}(A) \neq \emptyset$. Allora $\exists \min \mathcal{M}(A)$ (esiste il più piccolo tra i maggioranti di A)

DIM
Sia $B = \mathcal{M}(A)$.
Per definizione $\forall a \in A, b \in B : b \geq a$.

Inoltre per ipotesi $A \neq \emptyset \ \wedge \ B \neq \emptyset$.
Per la proprietà di continuità di $\mathbb{R}$: $\exists \ c \in \mathbb{R}$ t.c.

$\forall a \in A : c \geq a \Rightarrow c \in \mathcal{M}(A)$

$\forall b \in B : c \leq b \Rightarrow c = \min \mathcal{M}(A)$.

<u>Def</u>. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme tale che $A \neq \emptyset$ e $\mathcal{M}(A) \neq O$.
Si definisce ESTREMO SUPERIORE di A il minimo di $\mathcal{M}(A)$.
Tale elemento si indica con $\sup A$

$(\sup A := \min \mathcal{M}(A))$