

Proprietà delle funzioni reali di variabile reale

Riduciamo alcune definizioni riguardanti le funzioni reali di variabile reale (limitatezza / illimitatezza superiore e/o inferiore, simmetria, periodicità, monotonia)

definizione Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A non vuoto.

- f è LIMITATA SUPERIORMENTE $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(A) \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente

Un'altra soluzione

$$\sup_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup f(A) \quad \text{o semplicemente} \quad \sup f$$

- f è LIMITATA INFERIORMENTE $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(A) \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente

Un'altra soluzione

$$\inf_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf f(A) \quad \text{o semplicemente} \quad \inf f$$

- f è LIMITATA $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(A) \subset \mathbb{R}$ è limitato

$$\Leftrightarrow f \text{ è limitato sia inferiormente che superiormente}$$

- f è ILLIMITATA INFERIORMENTE $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(A) \subset \mathbb{R}$ è illimitato inferiormente

- f è ILLIMITATA SUPERIORMENTE $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(A) \subset \mathbb{R}$ è illimitato superiormente

- f è ILLIMITATA $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(A) \subset \mathbb{R}$ non è limitato

$$\Leftrightarrow f \text{ è illimitato superiormente o illimitato inferiormente}$$

definizione Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A non vuoto.

Sappiamo che A sia un insieme simmetrico (rispetto a 0), ovvero $\forall x \in A: -x \in A$

f è una FUNZIONE PARI $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A: f(-x) = f(x)$

f è una FUNZIONE DISPARI $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A: f(-x) = -f(x)$

Esempi di funzioni pari: $x^2, x^4, x^6, \dots, |x|, \cos x$

Esempi di funzioni dispari: $x, x^3, x^5, \dots, \sin x$

Se f è una funzione pari, $G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)): x \in A\}$ è un sottoinsieme del piano cartesiano simmetrico rispetto all'asse y

Se f è una funzione dispari, G_f è un sottoinsieme del piano cartesiano simmetrico rispetto all'origine

definizione Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A non vuoto.

Supponiamo che $\exists T > 0$ tale che $\forall x \in A: x \pm T, x - T \in A$.

f è una funzione T -periodica $\Leftrightarrow \forall x \in A: f(x+T) = f(x)$
 $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall k \in \mathbb{Z}: f(x+kT) = f(x)$

Esempi: $\cos$, $\sin$ sono funzioni 2π -periodiche

definizione Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A non vuoto.

f è una FUNZIONE CRESCENTE $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

f è una FUNZIONE STRETTAMENTE CRESCENTE $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f è una FUNZIONE DECRESCENTE $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

f è una FUNZIONE STRETTAMENTE DECRESCENTE $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Esempi di funzioni strettamente crescenti: $x, x^3, x^5, \dots, 2^x, e^x, 3^x, \log_2 x, \ln x, \log_3 x$

Esempi di funzioni strettamente decrescenti: $(\frac{1}{2})^x, (\frac{1}{3})^x, \log_{\frac{1}{2}} x, \log_{\frac{1}{3}} x$

f si dice MONOTONA se f è una funzione crescente oppure decrescente

f si dice STRETTAMENTE MONOTONA se f è una funzione strettamente crescente oppure strettamente decrescente

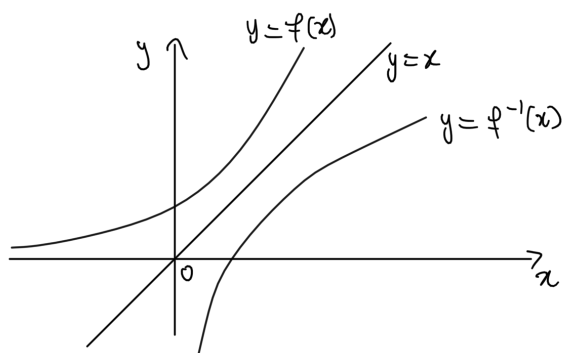
definizione Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ una funzione biettiva ($\forall y \in B \exists! x \in A$ tale che $f(x) = y$)

Si dice FUNZIONE INVERSA di f e si denota f^{-1} la funzione

$f^{-1}: B \rightarrow A$ definita ponendo $\forall y \in B: f^{-1}(y) = \text{l'unico } x \in A \text{ tale che } f(x) = y$

Il grafico della funzione f^{-1} , $G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)), y \in B\}$, si ottiene da G_f tramite una simmetria assiale rispetto alla retta $y=x$ (bisettrice I e III quadrante)

Esempio;



Proposizione Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva ($\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

- Se f è strettamente crescente allora $f: A \rightarrow f(A)$ è biettiva e anche $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ è strettamente crescente
- Se f è strettamente decrescente allora $f: A \rightarrow f(A)$ è biettiva e anche $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ è strettamente decrescente

Esempio: Funzioni esponenziali e logaritmiche

- Se $a > 1$ allora la funzione esponenziale

$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ è strettamente crescente $\Rightarrow \log_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente

- Se $a \in (0, 1)$ allora la funzione esponenziale

$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ è strettamente decrescente $\Rightarrow \log_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente decrescente

Proposizione Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ una funzione biettiva e supponiamo che il dominio A sia simmetrico (rispetto allo zero).

Se f è una funzione dispari allora anche f^{-1} è una funzione dispari

Esempio: x^3 è dispari $\Rightarrow \sqrt[3]{x}$ è dispari

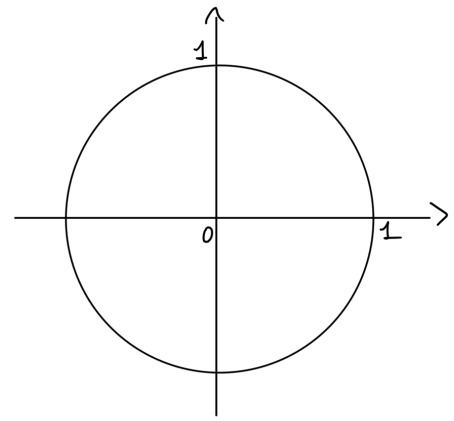
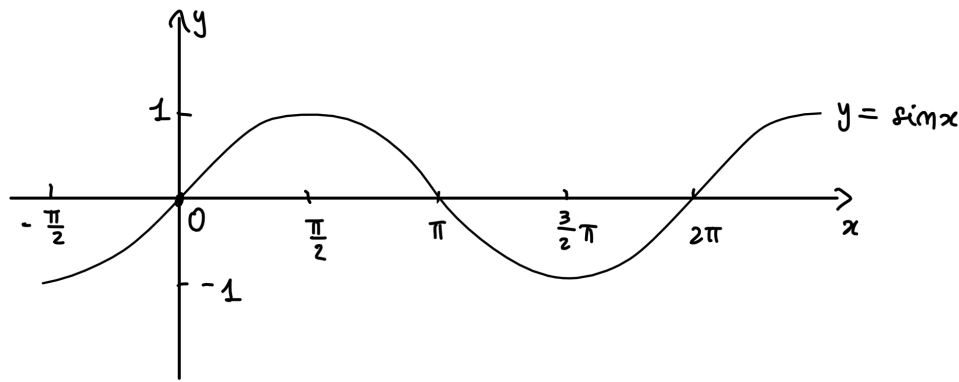
Osservazioni: 1) Una funzione T -periodica $f: A \rightarrow f(A)$ non può mai essere invertibile poiché f non è iniettiva ($f(x+KT) = f(x) \quad \forall x \in A, \forall K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pur essendo $x+KT \neq x$).

Tuttavia se consideriamo un sottoinsieme B di A su cui f è iniettiva (ad esempio considerando un sottointervallo su cui f è strettamente monotona) allora $f: B \rightarrow f(B)$ è biettiva e quindi invertibile (esempi: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$)

2) Una funzione pari $f: A \rightarrow f(A)$ non può mai essere invertibile poiché f non è iniettiva ($f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A \setminus \{0\}$, pur essendo $x \neq -x$)

Ciononostante se f è iniettiva in $A \cap [0, +\infty)$ allora $f: [0, +\infty) \cap A \rightarrow f([0, +\infty) \cap A)$ è invertibile (esempi: $x^2, x^4, \dots$)

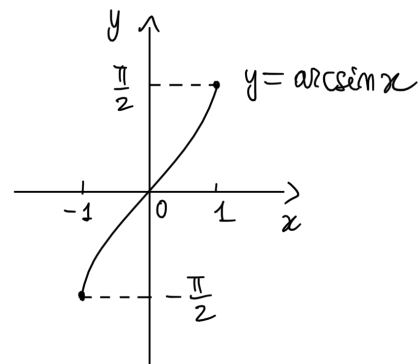
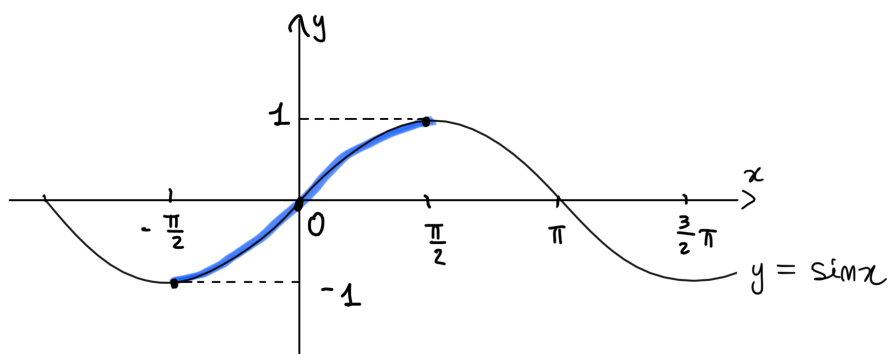
Grafico della funzione seno



Proprietà della funzione seno

- il dominio della funzione $\sin$ è $\mathbb{R}$
- il codominio della funzione $\sin$ è $[-1, 1]$ ($\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$)
- $\sin$ è una funzione dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine)
- $\sin$ è una funzione 2π -periodica
- gli zeri di $\sin$ sono tutti e soli i valori $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin$ è strettamente positiva in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$
(angolo per punti della circonferenza goniometrica nel I e II quadrante)
- $\sin$ è strettamente negativa in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$
(angolo per punti della circonferenza goniometrica nel III e IV quadrante)
- $\sin$ è strettamente crescente su $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
ATTENZIONE ⚠ $\sin$ NON è strettamente crescente nel suo dominio !!
- $\sin$ è strettamente decrescente su $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin$ è una funzione limitata superiormente e inferiormente
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sin x = 1, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \sin x = -1$$

Funzione arcoseno



$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ è strettamente crescente e surgettiva
($\Rightarrow$ iniettiva)

La funzione inversa di questa funzione si chiama funzione ARCOSENO

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$\forall x \in [-1, 1] : \arcsin x = y \stackrel{\text{def}}{=} y$ è l'unico elemento di $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tale che $\sin y = x$

Proprietà della funzione arcoseno

- il dominio di $\arcsin$ è $[-1, 1]$
- il codominio di $\arcsin$ è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arcsin$ è una funzione dispari $\forall x \in [-1, 1] : \arcsin(-x) = -\arcsin x$
- $\arcsin$ è una funzione strettamente crescente
- $x=0$ è l'unico zero di $\arcsin$, $\arcsin$ è strettamente positiva su $(0, 1]$
 $\arcsin$ è strettamente negativa su $[-1, 0)$
- $\arcsin$ è una funzione limitata $\sup_{x \in [-1, 1]} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, $\inf_{x \in [-1, 1]} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$

Esempi: $\arcsin 0 = 0$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

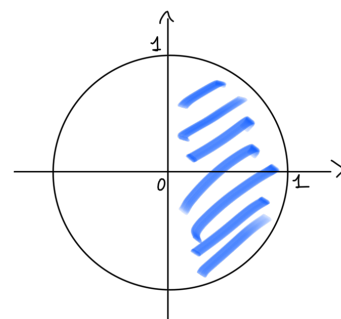
$$\arcsin(-1) = -\arcsin(1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \alpha \quad \alpha \text{ è l'unico arco in } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tale che } \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

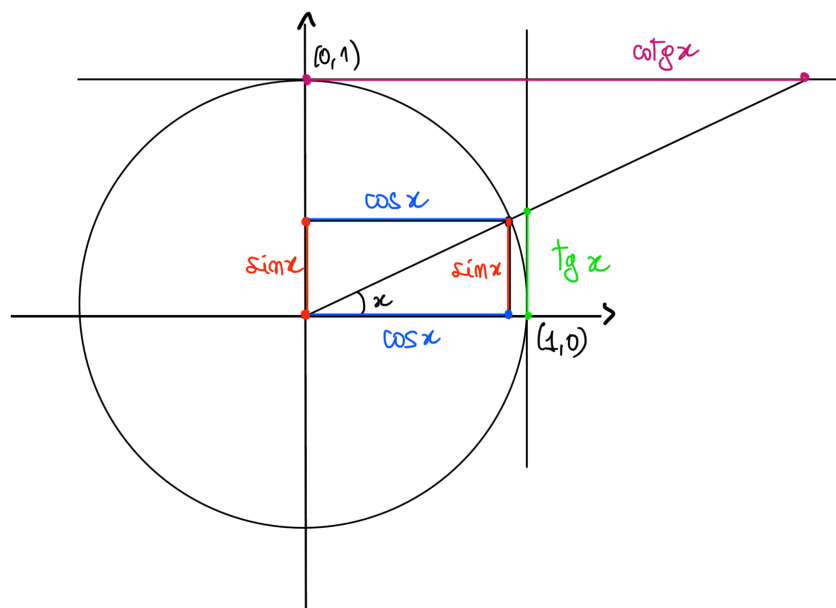


Definizione $\forall x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} : \quad \operatorname{tg} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{TANGENTE di } x$

$\forall x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\} : \quad \operatorname{cotg} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{COTANGENTE di } x$

Nota: la tangente di x viene denotata anche $\tan x$ (specialmente nella letteratura anglosassone)

Interpretazione geometrica delle funzioni tangente e cotangente



Nota: le funzioni tangente e cotangente sono π -periodiche e dispari, infatti

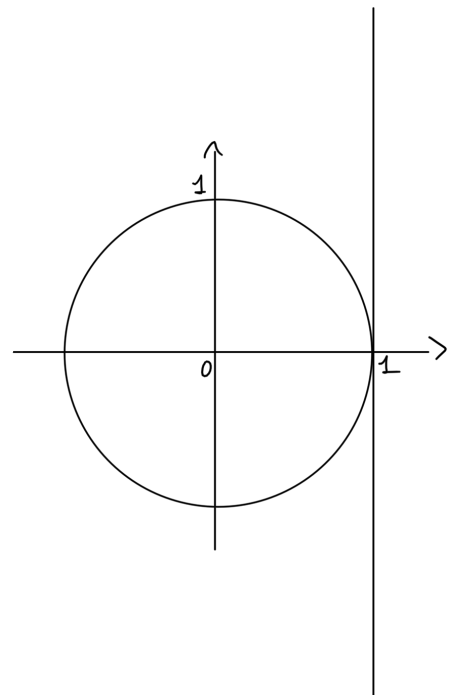
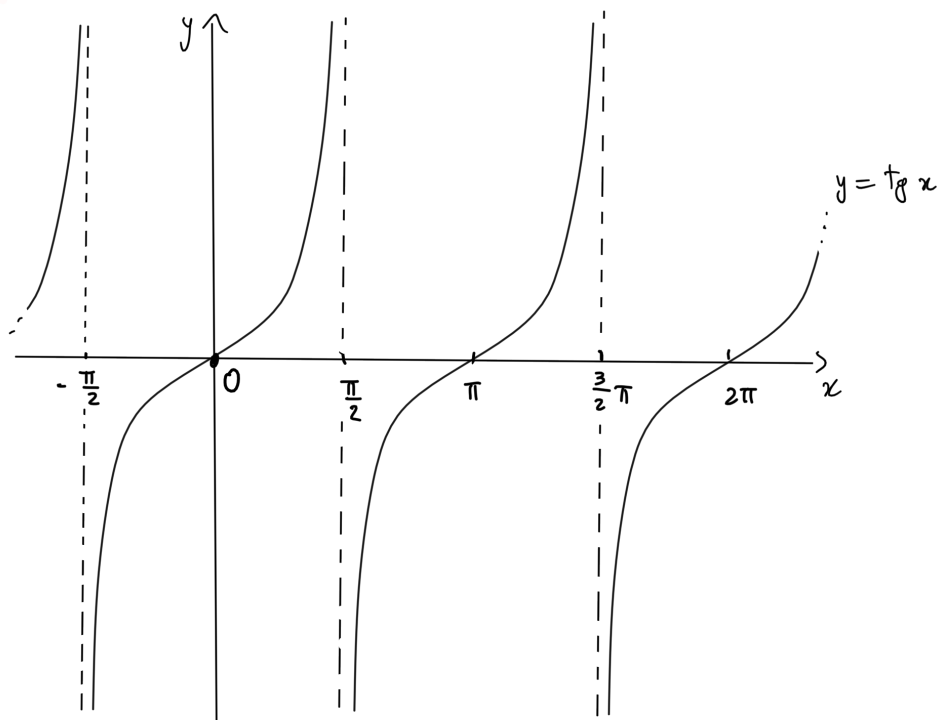
$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cotg}(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{cotg} x$$

Ripartiamo in tabella i valori di $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ per alcuni archi notevoli

x	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	0
$\frac{2}{3}\pi$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	-1	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
π	0	$\nexists$

Grafico delle funzioni tangenti



Proprietà delle funzioni tangenti:

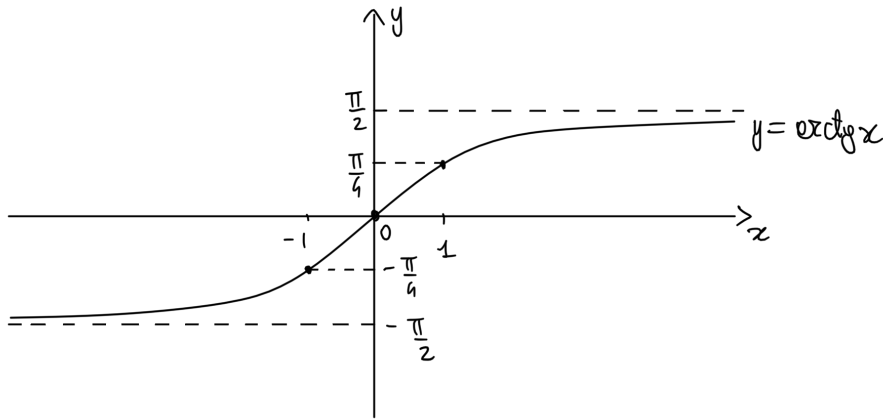
- il dominio di tg è $\mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ (le tangenti non è definita nei punti in cui si annulla il coseno)
- il codominio di tg è $\mathbb{R}$
- tg è una funzione dispari, cioè $\forall x \in \text{dom}(\text{tg}) : \text{tg}(-x) = -\text{tg} x$
(ovvero il grafico di tg è simmetrico rispetto all'origine)
- tg è una funzione π -periodica, cioè $\forall x \in \text{dom}(\text{tg}), \forall k \in \mathbb{Z} : \text{tg}(x + k\pi) = \text{tg} x$
- gli zeri di tg sono tutti e soli i valori $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- tg è strettamente positiva in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
(ovvero per punti della circonferenza goniometrica nel I e III quadrante)
- tg è strettamente negativa in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$
(ovvero per punti della circonferenza goniometrica nel II e IV quadrante)
- tg è strettamente crescente su $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
ATTENZIONE ⚠ tg NON è strettamente crescente nel suo dominio !!
- tg è una funzione illimitata sia superiormente che inferiormente

Funzione arcotangente

$\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e surgettiva
($\Rightarrow$ invertibile)

e quindi è una funzione invertibile, la funzione inversa si chiama funzione ARCOTANGENTE

$\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{arctg } x = y \iff y \text{ è l'unico elemento in } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
tale che $\text{tg } y = x$



Proprietà della funzione arcotangente

- il dominio di arctg è $\mathbb{R}$
- il codominio di arctg è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- arctg è una funzione dispari $\forall x \in \mathbb{R} : \text{arctg}(-x) = -\text{arctg } x$
- arctg è una funzione strettamente crescente (su $\mathbb{R}$)
- $x=0$ è l'unico zero di arctg
- arctg è strettamente positiva su $(0, +\infty)$
- arctg è strettamente negativa su $(-\infty, 0)$
- arctg è una funzione limitata
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \text{arctg } x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \text{arctg } x = -\frac{\pi}{2}$$

Esempi : $\text{arctg } 0 = 0$

$$\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

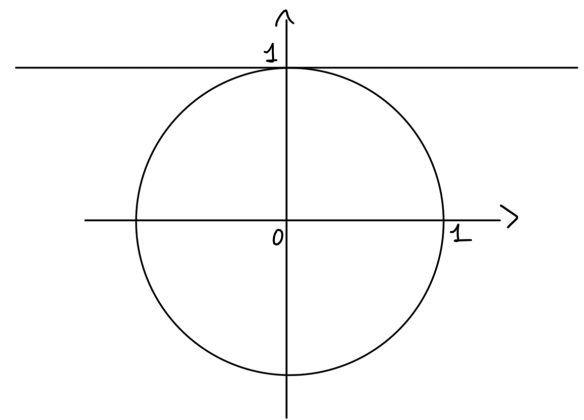
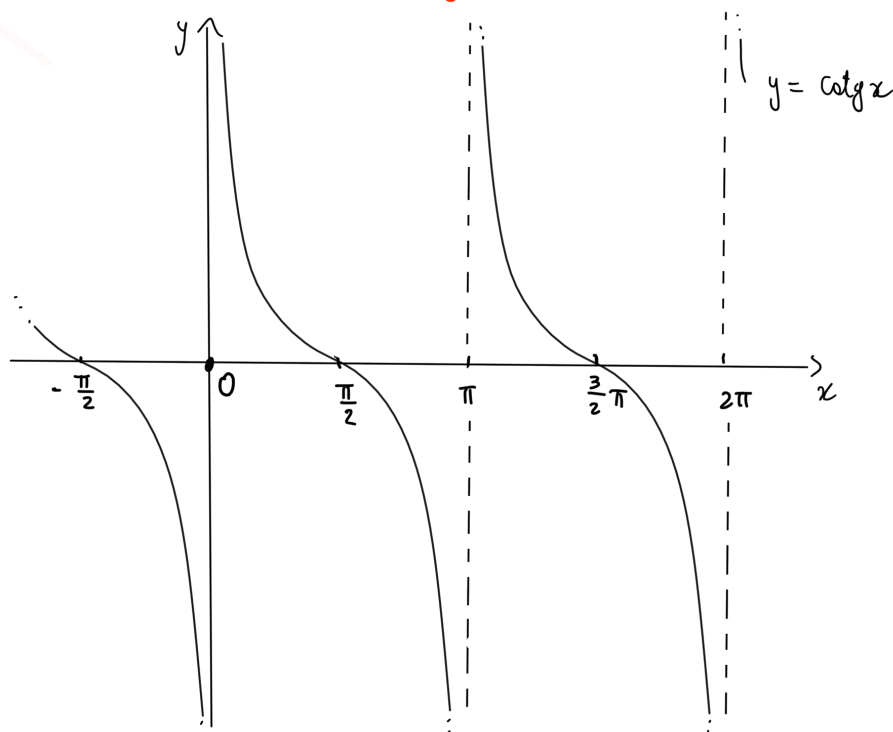
$$\text{arctg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{arctg}(-1) = -\text{arctg}(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

Grafico della funzione cotangente



Proprietà della funzione cotangente : **Esercizio per cose !!**

- il dominio di $\cotg$ è ??
- il codominio di $\cotg$ è ??
- $\cotg$ è una funzione **pari / ??** **dispari**, cioè $\forall x \in \text{dom}(\cotg) : \cotg(-x) = ??$
(ovvero il grafico di $\cotg$ è simmetrico rispetto all'origine)
- $\cotg$ è una funzione π -periodica, cioè $\forall x \in \text{dom}(\cotg), \forall k \in \mathbb{Z} : \cotg(x + k\pi) = ??$
- gli zeri di $\cotg$ sono tutti e soli i valori $x = ??$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cotg$ è strettamente positiva in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ??$

(ovvero per punti della circonferenza goniometrica nel ? e ? quadrante)

- $\cotg$ è strettamente negativa in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ??$

(ovvero per punti della circonferenza goniometrica nel ? e ? quadrante)

- $\cotg$ è strettamente decrescente su $(??, ??)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
- $\cotg$ è una funzione illimitata sia superiormente che inferiormente
- $\cotg : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione strettamente decrescente e quindi invertibile.
La sua funzione inversa si chiama ARCO-COTANGENTE e si denota arccotg

Esercizio : Disegnare il grafico di arccotg e scriverne le proprietà fondamentali

Formule di addizione e sottrazione

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Formule di duplicazione

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Formule parametriche

$$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{dove } t = \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

Equazioni e disequazioni goniometriche

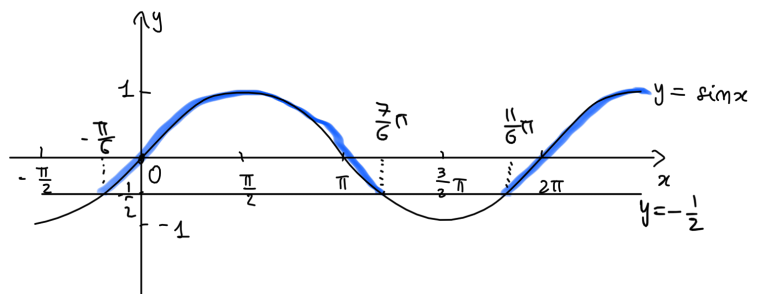
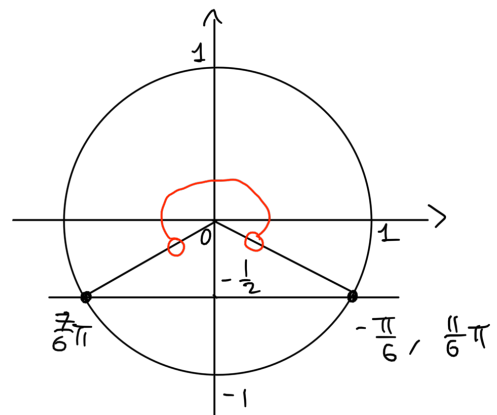
$$\text{Ricordiamo che } \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

$$\text{Es 1 } 2 \sin x > -1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sin x > -\frac{1}{2}$$

Consideriamo l'equazione associata in $[0, 2\pi]$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad x \in [0, 2\pi] \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi$$

$$\sin x > -\frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

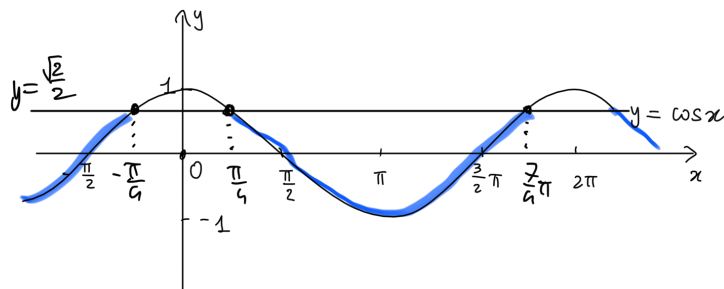
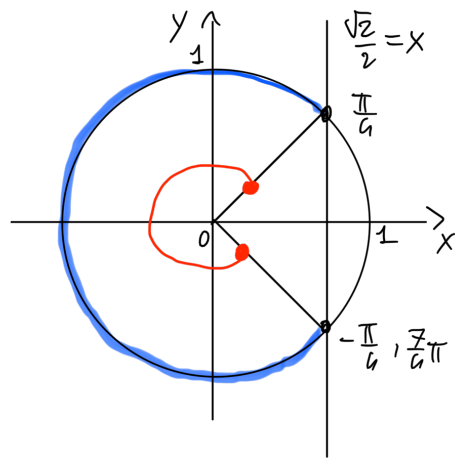


Es 2 $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ in } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$



Es 3 $3\cos^2 x - 2\cos x - 1 > 0$

$$t = \cos x$$

$$3t^2 - 2t - 1 > 0$$

risolviamo l'equazione associata

$$t_{1/2} = \frac{2 \pm 4}{6} < -\frac{1}{3}$$

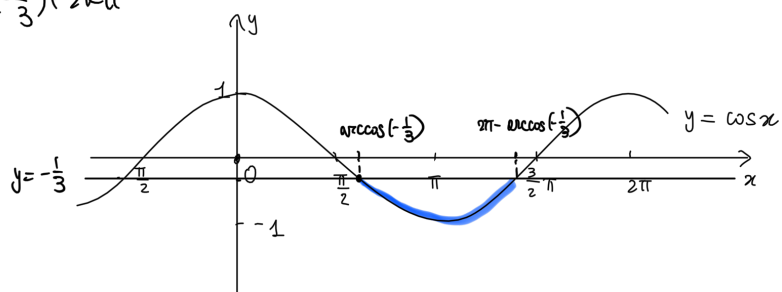
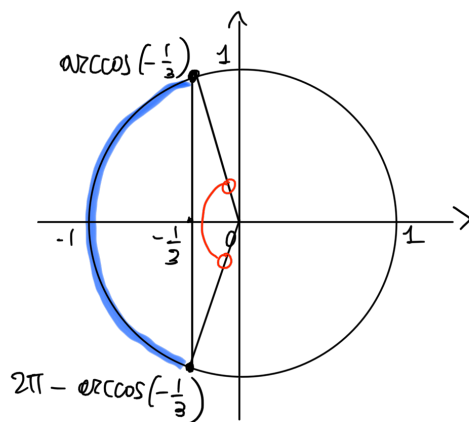
$$t < -\frac{1}{3} \vee t > 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{3} \vee \cos x > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$



Es 4 $\tan^2 x \leq 1$

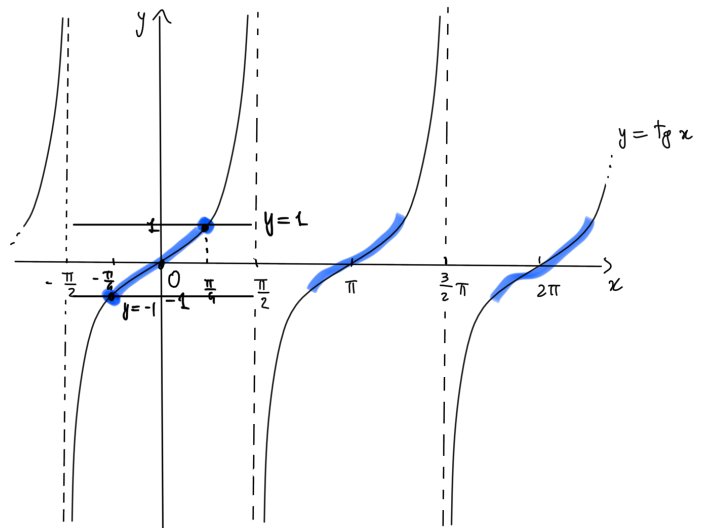
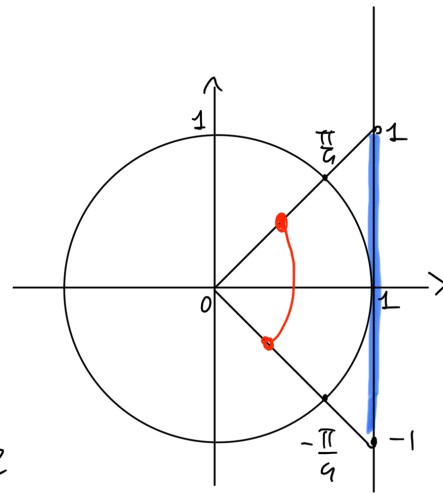
$t = \tan x$

$t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t^2 - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$

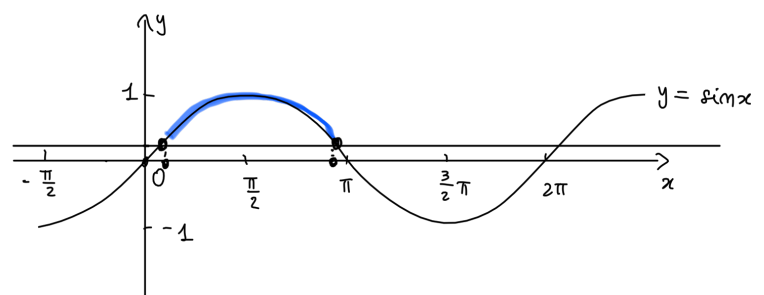
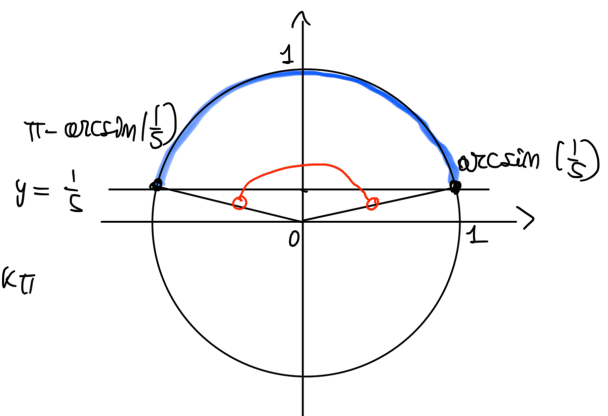
$\Leftrightarrow -1 \leq \tan x \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Es 5 $\sin x > \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\pi$
 $k \in \mathbb{Z}$



Es 6 $\cos x \geq -\frac{1}{4}$

$$-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \leq x \leq \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

