

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Siano $b > 0$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ e $c \in \mathbb{R}$, ricordiamo la seguente definizione

$$\log_a b = c \stackrel{\text{def}}{\iff} a^c = b$$

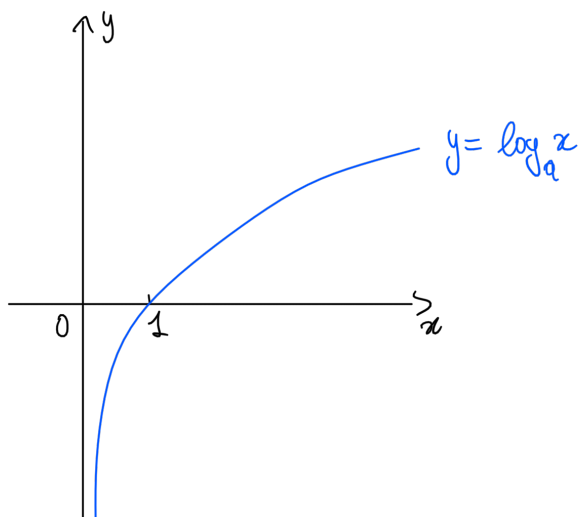
Proprietà dei logaritmi

- $\forall x, y > 0, \forall a \in (0, +\infty) \setminus \{1\} : \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\forall x, y > 0, \forall a \in (0, +\infty) \setminus \{1\} : \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\forall x > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \forall a \in (0, +\infty) \setminus \{1\} : \log_a x^b = b \log_a x$
- $\forall x > 0, \forall a, c \in (0, +\infty) \setminus \{1\} : \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$

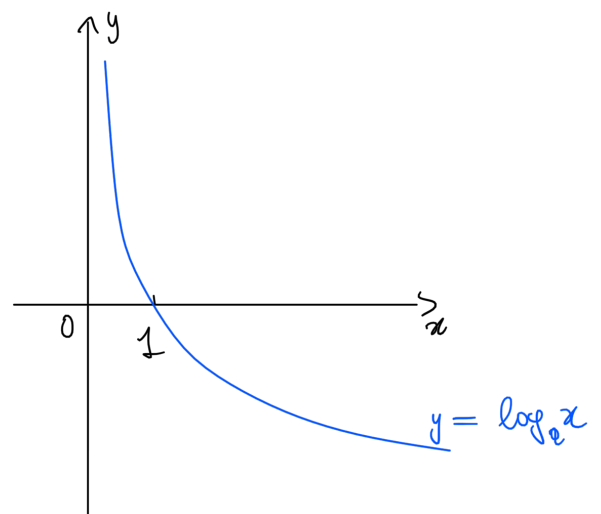
ricordiamo inoltre che

- $\forall a \in (0, +\infty) \setminus \{1\} : \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
- $\forall a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}, \forall r \in \mathbb{R} : \log_a e^r = r$
- $\forall a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}, \forall k > 0 : a^{\log_a k} = k$

Grafici delle funzioni logaritmiche



CASO $a > 1$



CASO $a \in (0, 1)$

In questo caso dobbiamo considerare diversamente le disequazioni a seconda che la base della funzione logaritmica sia > 1 oppure in $(0, 1)$

Siamo $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ e $k \in \mathbb{R}$

$$\bullet \log_a f(x) = k \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^k \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Se } a > 1 \text{ allora : } \log_a f(x) > k \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^k \end{cases}$$

$(\geq)$ $(\geq)$

$$\log_a f(x) < k \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^k \end{cases}$$

$(\leq)$ $(\leq)$

$$\bullet \text{ Se } a \in (0, 1) \text{ allora : } \log_a f(x) > k \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^k \end{cases}$$

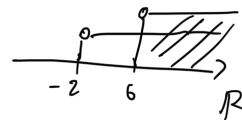
$(\geq)$ $(\leq)$

$$\log_a f(x) < k \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^k \end{cases}$$

$(\leq)$ $(\geq)$

NB: $\log$ oppure $\ln$ denota il "logaritmo naturale", ovvero il logaritmo in base e (numero di Nepero)

Es 1 $\log_2(x+2) > 3 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 > 2^3 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x > -2 \\ x > 6 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad x > 6$



Es 2 $\log_3^2 x - \log_3 x \leq 0 \quad t = \log_3 x$

$$(\Leftrightarrow) \quad t^2 - t \leq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad t(t-1) \leq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 0 \leq \log_3 x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x > 0 \\ 3^0 \leq x \leq 3^1 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

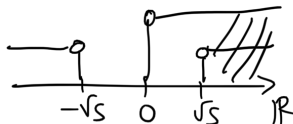
$$(\Leftrightarrow) \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$S = [1, 3]$$

Es 3 $\log_2(x^2-5) = 2 + \log_2 x$

calcoliamo le condizioni di esistenza

$$\begin{cases} x^2-5 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{5}$$



$$\log_2(x^2-5) = 2 + \log_2 x = \log_2 4 + \log_2 x = \log_2(4x)$$

$$\Rightarrow x^2-5 = 4x \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 5 \Rightarrow x=5$$

$\Delta = 16 + 20 = 36$
 $x_{1/2} = \frac{4 \pm 6}{2}$

non accettabili

Es 4 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

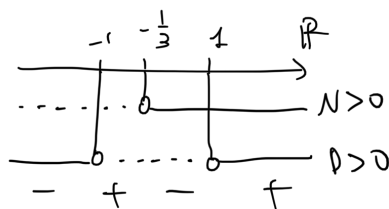
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} < \frac{x}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x < -1 \vee x > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x+1} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ \frac{(x+1)^2 - (x-1)x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x+1 - x^2+x}{x^2-1} = \frac{3x+1}{x^2-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \vee -\frac{1}{3} < x < 1$$

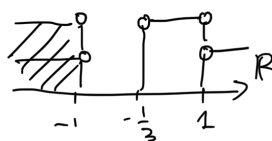
Risolviamo $\frac{3x+1}{x^2-1} < 0$ studiando il segno

$$N > 0 : 3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

$$D > 0 : x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$



$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x < -1 \vee -\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1$$



Es 5

$$3^x \geq 5 \Rightarrow \log_3 3^x \geq \log_3 5 \Rightarrow x \geq \log_3 5$$

$$S = [\log_3 5, +\infty)$$

Es 6

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x < 6$$

$$1^\circ \text{ metodo : } \left(\frac{1}{7}\right)^x < 6 \Rightarrow \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^x > \log_{\frac{1}{7}} 6 \Rightarrow x > \log_{\frac{1}{7}} 6$$

$$2^\circ \text{ metodo : } \left(\frac{1}{7}\right)^x < 6 \Rightarrow 7^{-x} < 6 \Rightarrow \log_7 7^{-x} < \log_7 6 \\ \Rightarrow -x < \log_7 6 \Rightarrow x > -\log_7 6$$

Per la formula del cambiamento di base

$$\log_{\frac{1}{7}} 6 = \frac{\log_7 6}{\log_7 \frac{1}{7}} = -\log_7 6$$

Simulazione quesiti d'esame

Q1 1) Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$$\frac{1 - |x^2 - 3|}{x^3 + x - 2} > 0$$

$$[S = (-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, 1) \cup (\sqrt{2}, 2)]$$

2) Utilizzando l'insieme delle soluzioni determinato nel punto precedente, determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$$\frac{1 - |4^{2x} - 3|}{4^{3x} + 4^x - 2} > 0$$

$$[S = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})]$$

Q2

1) Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}}{2 - |2x+1|} \leq 0$$

$$[S = [-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2]]$$

(Suggerimento: cominciare stabilendo le condizioni di esistenza, quindi procedere con lo studio del segno)

2) Utilizzando l'insieme delle soluzioni determinato nel punto precedente, determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

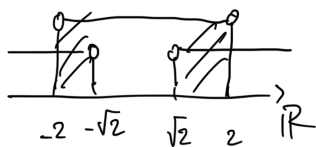
$$\frac{\sqrt{\log x + 1} - \sqrt{2 - \log x}}{2 - |2 \log x + 1|} \leq 0$$

$$[S = [\frac{1}{e}, \sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, e^2]]$$

Svolgimento Q1

1) $\frac{1 - |x^2 - 3|}{x^3 + x - 2} > 0$ procediamo con lo studio del segno

$$\begin{aligned} N > 0 : 1 - (x^2 - 3) > 0 &\Leftrightarrow |x^2 - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 3 < 1 \\ &\Leftrightarrow 2 < x^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 2 \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ -2 < x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow -2 < x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < 2$$

$$D > 0 : x^3 + x - 2 > 0$$

$$p(x) = x^3 + x - 2 \quad \pm 1, \pm 2 \quad \text{Candidati a essere radici di } p$$

$$p(1) = 0$$

$$p(-1) = -4 \neq 0$$

$$p(2) = 8 \neq 0$$

$$p(-2) = -12 \neq 0$$

$p(x)$ è divisibile per $x-1$

$x^3 + x - 2$	$x-1$
$x^3 - x^2$	$x^2 + x + 2$
$\parallel x^2 + x - 2$	
$x^2 - x$	
$\parallel 2x - 2$	
$2x - 2$	
$\parallel$	

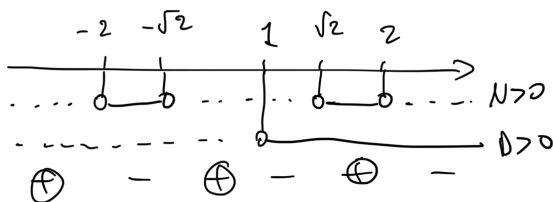
$$p(x) = (x-1)(x^2+x+2)$$

$$x^3 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\Delta = -7 < 0$$

il polinomio x^2+x+2 è $> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Grafico dei segni



$$\frac{1 - |x^2 - 3|}{x^3 + x - 2} > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee -\sqrt{2} < x < 1 \vee \sqrt{2} < x < 2$$

$$S = (-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, 1) \cup (\sqrt{2}, 2)$$

b) $\frac{1 - |4^{2x} - 3|}{4^{3x} + 4^x - 2} > 0$ pensiamo $t = 4^x$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - |t^2 - 3|}{t^2 + t - 2} > 0 \Leftrightarrow t < -2 \vee -\sqrt{2} < t < 1 \vee \sqrt{2} < t < 2$$

$$\Leftrightarrow h^x < -2 \vee -\sqrt{2} < h^x < 1 \vee \sqrt{2} < h^x < 2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \vee \begin{cases} h^x > -\sqrt{2} \\ h^x < 1 = h^0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \vee \begin{cases} h^x > \sqrt{2} \\ h^x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow h^x < h^0 \vee \begin{cases} 2^{2x} > 2^{\frac{1}{2}} \\ 2^{2x} < 2^1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \vee \begin{cases} 2x > \frac{1}{2} \\ 2x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \vee \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \vee \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

Svolgimento Q2 (esercizio per casa non svolto a lezione)

$$1) \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}}{2 - |2x+1|} \leq 0$$

determiniamo le condizioni di esistenza / ovvero il dominio di $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}}{2 - |2x+1|}$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 & \text{condizione di esistenza alla radice } \sqrt{x+1} \\ 2-x \geq 0 & \text{condizione di esistenza alla radice } \sqrt{2-x} \\ 2 - |2x+1| \neq 0 & \text{denominatore della frazione non nullo} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2 \\ |2x+1| \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 2x+1 \neq -2 \wedge 2x+1 \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{NB: } |2x+1| \neq 2 \Leftrightarrow \neg (|2x+1| = 2)$$

$$\Leftrightarrow \neg (2x+1 = -2 \vee 2x+1 = 2)$$

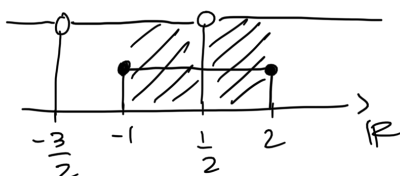
$$\Leftrightarrow \neg (2x+1 = -2) \wedge \neg (2x+1 = 2)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 \neq -2 \wedge 2x+1 \neq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq -\frac{3}{2} \wedge x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x \leq 2$$

(condizioni di esistenza)



Possiamo allo studio del segno

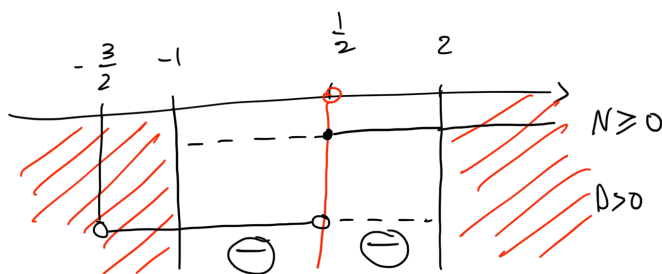
$$N \geq 0 : \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{2-x}$$

Se imponiamo le condizioni di esistenza possiamo sempre dedurre al quadrato le due radici

$$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{2-x} \Rightarrow x+1 \geq 2-x \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Attenzione: $x = \frac{1}{2}$ è uno zero del numeratore e quindi potremmo considerarlo nel risolvere $N \geq 0$, tuttavia osserviamo che $x = \frac{1}{2}$ è uno zero anche del denominatore pertanto non soddisfa le condizioni di esistenza e non essere escluso

$$\begin{aligned} D > 0 : 2 - |2x+1| > 0 &\Leftrightarrow |2x+1| < 2 \\ &\Leftrightarrow -2 < 2x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < 2x < 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$



le parti in rosso evidenziano l'insieme su cui NON sono soddisfatte le condizioni di esistenza

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}}{2 - |2x+1|} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x \leq 2$$

$$2) \frac{\sqrt{\log x + 1} - \sqrt{2 - \log x}}{2 - |2 \log x + 1|} \leq 0$$

Poniamo $t = \log x$, allora possiamo riscrivere la disuguaglianza precedente come segue

$$\frac{\sqrt{t+1} - \sqrt{2-t}}{2 - |2t+1|} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t < \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < t \leq 2$$

↑
utilizziamo il risultato ottenuto nel punto 1)

$$\Leftrightarrow -1 \leq \log x < \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < \log x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{condizioni di esistenza del logaritmo} \\ e^{-1} \leq x < e^{\frac{1}{2}} \vee e^{\frac{1}{2}} < x \leq e^2 \end{cases}$$

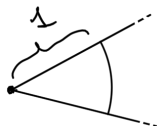
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{e} \leq x < \sqrt{e} \vee \sqrt{e} < x \leq e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq x < \sqrt{e} \vee \sqrt{e} < x \leq e^2$$

(la seconda condizione è un sottoinsieme di $x > 0$)

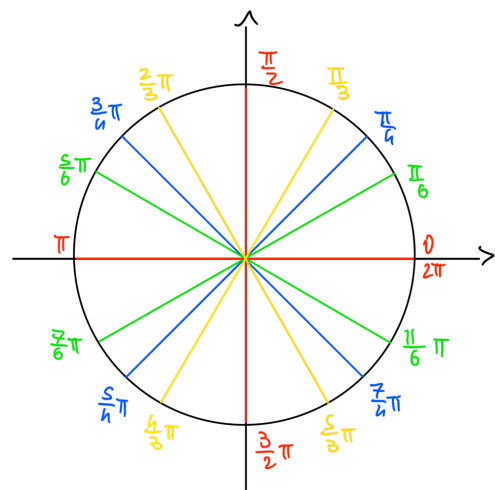
Goniometria

Consideriamo la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine di un riferimento cartesiano. Tale circonferenza (detta CIRCONFERENZA GONIOMETRICA) ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$

In questo corso considereremo solamente angoli in radianti. Ricordiamo che la misura in radianti di un angolo corrisponde alla lunghezza dell'arco della circonferenza unitaria intercettato dalle due semirette che individuano l'angolo considerato



Angolo in gradi	Angolo in radianti
0°	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2}{3}\pi$
135°	$\frac{3}{4}\pi$
150°	$\frac{5}{6}\pi$
180°	π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π

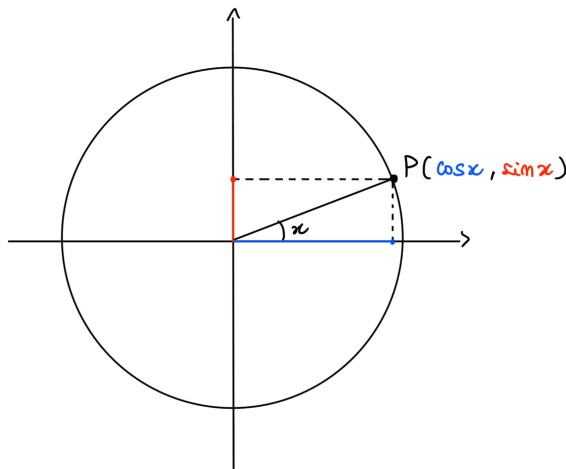


- Come nel caso della retta reale, sulla circonferenza goniometrica si introducono
- un'origine (l'angolo nullo e per convenzione quello individuato dal punto $(1,0)$);
 - un'orientamento (verso antiorario).

Possiamo dunque considerare angoli $\geq 2\pi$ aggiungendo multipli dell'angolo giro e angoli < 0 sottraendo multipli dell'angolo giro.

Geometricamente l'angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ individua lo stesso punto sulla circonferenza goniometrica individuato da tutti e soli gli angoli del tipo $\alpha + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione Dato un angolo di α radianti esso individua un unico punto P sulla circonferenza goniometrica le cui componenti cartesiane vengono denotate $(\cos \alpha, \sin \alpha)$



Attraverso la definizione precedente possiamo introdurre due funzioni:

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione coseno

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione seno

In virtù dell'orientamento introdotto sulla circonferenza goniometrica otteniamo due $\cos$ e $\sin$ sono FUNZIONI 2π -PERIODICHE, ovvero

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} : \begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

Dall'equazione cartesiana per la circonferenza goniometrica segue

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (1^a \text{ relazione fondamentale goniometrica})$$

Infatti, poiché la circonferenza goniometrica è contenuta nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{aligned} -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ -1 &\leq \sin x \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{queste due relazioni ci dicono che le funzioni } \cos \text{ e } \sin \text{ sono limitate})$$

Ricerchiamo i valori delle funzioni $\cos$ e $\sin$ per alcuni archi notevoli

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1
$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	1	0

I valori per $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ si possono ricavare utilizzando il teorema di Pitagora

Gli altri valori sono deducibili dalle formule degli ARCHI ASSOCIATI

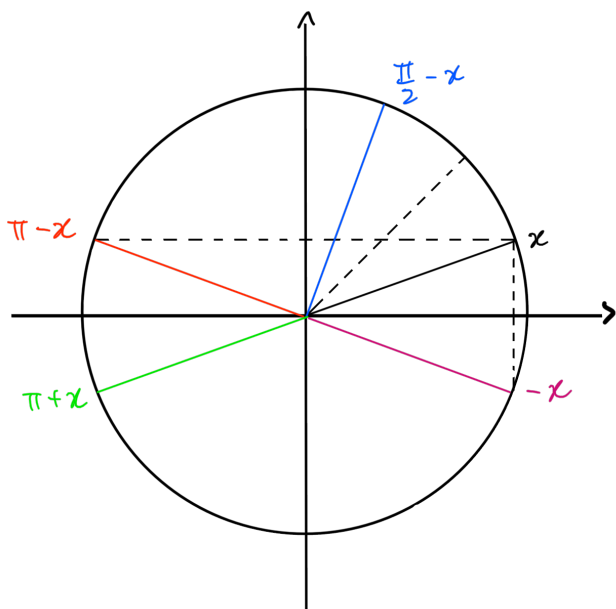
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\end{aligned}\quad \left(\begin{array}{l}\text{simmetria} \\ \text{rispetto alla} \\ \text{bisettrice del} \\ \text{I e III quadrante}\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x\end{aligned}\quad \left(\begin{array}{l}\text{simmetria} \\ \text{rispetto all'asse } y\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x\end{aligned}\quad \left(\begin{array}{l}\text{simmetria} \\ \text{rispetto all'origine}\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}\cos(2\pi - x) &= \cos(-x) = \cos x \\ \sin(2\pi - x) &= \sin(-x) = -\sin x\end{aligned}$$

(simmetria rispetto all'asse x e periodicità)



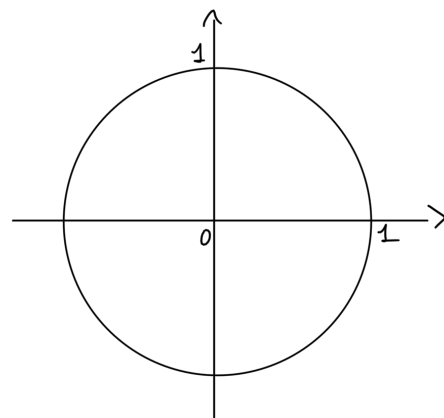
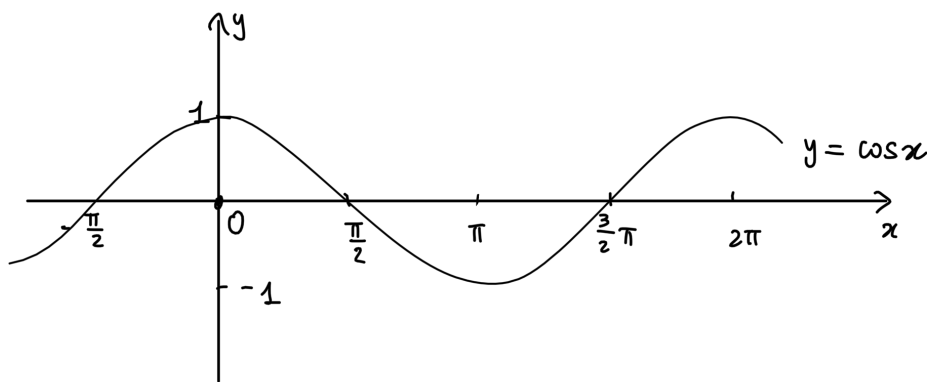
In particolare le relazioni per gli angoli opposti ci dicono che

- $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(-x) = \cos x$
ovvero $\cos$ è una FUNZIONE PARI

- $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin x$

ovvero $\sin$ è una FUNZIONE DISPARI

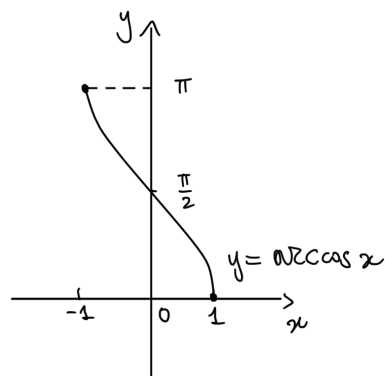
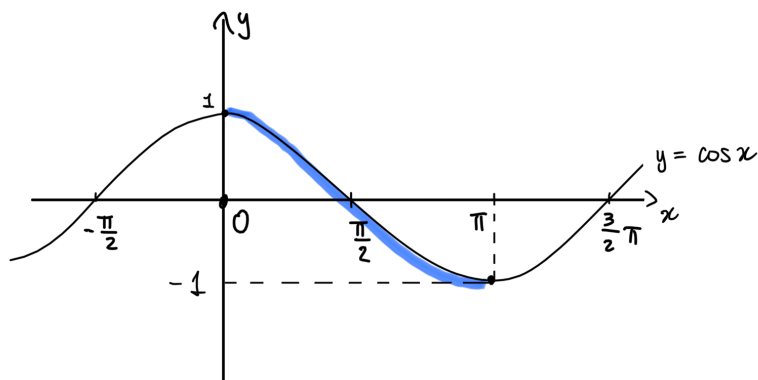
Grafico della funzione coseno



Proprietà fondamentali della funzione coseno

- il dominio di $\cos$ è $\mathbb{R}$
- il codominio di $\cos$ è $[-1, 1]$ ($\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$)
- $\cos$ è una funzione pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y)
- $\cos$ è una funzione 2π -periodica
- gli zeri di $\cos$ sono tutti e soli i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos$ è strettamente positivo in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$
(ovvero per punti della circonferenza goniometrica nel I e IV quadrante)
- $\cos$ è strettamente negativo in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$
(ovvero per punti della circonferenza goniometrica nel II e III quadrante)
- $\cos$ è strettamente decrescente su $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
ATTENZIONE ⚠ : $\cos$ NON è strettamente decrescente nel suo dominio !!
- $\cos$ è strettamente crescente su $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
ATTENZIONE ⚠ : $\cos$ NON è strettamente crescente nel suo dominio !!
- $\cos$ è una funzione limitata superiormente e inferiormente
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \cos x = \sup_{x \in \mathbb{R}} \cos(\mathbb{R}) = \sup [-1, 1] = 1,$$
$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \cos x = \inf_{x \in \mathbb{R}} \cos(\mathbb{R}) = \inf [-1, 1] = -1.$$

Funzione arco coseno



$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è strettamente decrescente, in particolare è invertibile

la funzione inversa si chiama funzione ARCOSENO

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $\forall x \in [-1, 1] \quad \arccos x = y \Leftrightarrow y \text{ è l'unico elemento di } [0, \pi] \text{ tale che } \cos y = x$

- il dominio di $\arccos$ è $[-1, 1]$
- il codominio di $\arccos$ è $[0, \pi]$
- $x=1$ è l'unico zero della funzione $\arccos$
- $\arccos$ è strettamente positiva su $[-1, 1)$
- $\arccos$ è strettamente decrescente
- $\arccos$ è una funzione limitata

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \arccos x = \pi$$

$$\inf_{x \in [-1, 1]} \arccos x = 0$$

Esempi:

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$$

$$\arccos (-1) = \pi$$

