

Esercizi - Equazioni, Disequazioni e Domini

Esercizio 1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:

1. $1 - 8x^2 < 7x$
2. $5x^2 + 2x + 1 \geq 0$
3. $4x^4 + 11x^2 = 3$
4. $\frac{x}{x^2 - 3x} = 1$
5. $\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$
6. $\frac{3x + 2}{x + 1} \geq 2 - x$
7. $\frac{x^3 - 2x + 1}{2x + 1} \geq 0$
8. $|x + 1| + 2x - 3 = 2$
9. $|2x - 1| \leq x + 1$
10. $|2x + 1| \geq x^2$
11. $|5x - 4| + e^x = 0$
12. $\frac{|x - 3| - 1}{x + 4} \leq 0$
13. $\frac{|5 - x| - 3}{x^2 - 3} > 0$
14. $\frac{|1 - 2x|}{5 - x} \leq 3 + x$
15. $\left| \frac{x^2 - 2}{x} \right| \leq 1$
16. $\left| \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5} \right| < 2$
17. $\sqrt{x^2 - 4x} \leq x + 3$
18. $\frac{x + 9}{x^2 + 3} \geq \frac{9x - 10}{2x^2 - 1}$
19. $\sqrt[3]{\frac{x^2 + 3x - 1}{2x + 1}} = 1$
20. $\sqrt{6x^2 - 5x + 1} \geq 2x + 1$
21. $e^{x^2} - 4 \leq 0$
22. $9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \leq 0$
23. $2^{-x} - 2^x + 6 = 0$
24. $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x - 3 \leq 0$
25. $\log \left(\frac{x^2 - 3}{1 - 3x} \right) > 0$
26. $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x + 9} \right) \geq 1$
27. $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
28. $2 \sin^2 x - \sin x \leq 0$
29. $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
30. $\cos x - \sin x = 0$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni:

1. $\begin{cases} \frac{x + 3}{2x - 1} \leq 2 \\ \frac{x^2}{x^2 + x} < 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x} \leq 2 \\ e^{2x} - 4 > 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \log \left(\frac{x+2}{x^2} \right) > 0 \\ e^{2x} - 4e^x - 5 \leq 0 \end{cases}$

Esercizio 3. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x) := \sqrt[5]{3x+1} - \sqrt[4]{4-x^2}$
2. $f(x) = \log\left(\frac{|4-x|-1}{x^2-4}\right)$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{2-|x^2+x|}{x+3}} + \log(9x^2+6x+1).$
4. $f(x) := \log_3\left(\frac{|2x-1|}{x^2+3x+2}\right) - 3x$
5. $f(x) = \frac{e^{-x} \cos x}{2\sqrt{x^4-1}}$
6. $f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{3x+1}}}{\sin x \sqrt{1-x-2x^2}}$

Simulazione esercizi di esame

Esercizio 4. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

1. $\frac{|x-4|-2x}{x-1} \leq 0$
2. $\frac{|e^{2x}-4|-2e^{2x}}{e^{2x}-1} \leq 0$

Esercizio 5. 1. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2-1}{1-|2x-3|} \geq 0.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) := \sqrt{\frac{\log^2 x - 1}{1 - |2 \log x - 3|}}.$$

Esercizio 6. Si consideri la funzione $f(x) := \sqrt{\frac{2-|x-3|}{x^2+x-2}}.$

1. Determinare $\text{Dom}(f).$
2. Determinare il dominio della funzione $g(x) := f(\sin x).$

Risultati degli esercizi

Esercizio 1

1. $x < -1 \vee x > \frac{1}{8}$
2. ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione
3. $x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$.
4. $x = 4$
5. $x \leq 1 \vee 2 < x < 3$
6. $-2 \leq x < -1 \vee x \geq 0$
7. $x \leq -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee -\frac{1}{2} < x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
 $\vee x \geq 1$
8. $x = \frac{4}{3}$
9. $0 \leq x \leq 2$
10. $x = -1 \vee 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$
11. L'equazione non ha soluzioni
12. $x < -4 \vee 2 \leq x \leq 4$
13. $x < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < x < 2 \vee x > 8$.
14. $2 - 3\sqrt{2} \leq x \leq 4 \vee x > 5$
15. $-2 \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq 2$
16. $1 - 2\sqrt{2} < x < 1 + 2\sqrt{2}$
17. $-\frac{9}{10} \leq x \leq 0 \vee x \geq 4$
18. $x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 3$
19. $x = -2 \vee x = 1$
20. $x \leq 0 \vee x \geq \frac{9}{2}$
21. $-\sqrt{2\log 2} \leq x \leq \sqrt{2\log 2}$
22. $0 \leq x \leq 2\log_3 2$
23. $x = \log_2(3 + \sqrt{10})$
24. $\frac{1}{27} \leq x \leq 3$
25. $x < -4 \vee \frac{1}{3} < x < 1$
26. $-\frac{5}{3} \leq x < 1 \vee 2 < x \leq 3$
27. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
28. $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
29. $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
30. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

1. $-1 < x < \frac{1}{2} \vee x \geq \frac{5}{3}$
2. $\log 2 < x \leq \sqrt{5} - 1$
3. $-1 < x < 0 \vee 0 < x \leq \log 5$

Esercizio 3

1. $Dom(f) = [-2, 2]$
2. $Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$
3. $Dom(f) = (-\infty, -3) \cup [-2, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, 1]$
4. $Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

5. $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

6. $Dom(1) = (-1, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

Esercizio 4

1. $x < 1 \vee x \geq \frac{4}{3}$

2. $x < 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \log \frac{4}{3}$

Esercizio 5

1. $-1 \leq x < 1 \vee 1 < x < 2$

2. $(\frac{1}{e}, e) \cup (e, e^2)$

Esercizio 6

1. $Dom(f) = (-2, 1) \cup (1, 5)$

2. $Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$