MATEMATICA LEZIONE 2

mercoledì 6 ottobre 2021 11:06

Codice del canale teams del corso: **i6hfurs**

Lunedì 11 Ottobre, ore 14:30: Correzione del Test di Autovalutazione sul canale teams del tutorato.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme:

- Il MASSIMO di A è un numero reale x tale che $x \in A \wedge x \geq a \ \forall a \in A$.
- Un MAGGIORANTE per A è un numero $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq a \ \forall a \in A$.
- A si dice SUPERIORMENTE LIMITATO se $\exists$ un maggiorante (cioè $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$)
- Abbiamo definito ESTREMO SUPERIORE di A la quantità:

$$\sup A = \begin{cases} \min \mathcal{M}(A) & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{M}(A) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } A \neq \emptyset \text{ ma } \mathcal{M}(A) = \emptyset \\ -\infty & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme:

- Il MINIMO di A è un numero reale x tale che $x \in A \wedge x \leq a \ \forall a \in A$.
- Un MINORANTE per A è un numero $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \leq a \ \forall a \in A$.
- A si dice INFERIORMENTE LIMITATO se $\exists$ un minorante per A (cioè $m(A) \neq \emptyset$)
- Abbiamo definito ESTREMO INFERIORE di A la quantità:

$$\inf A = \begin{cases} \max m(A) & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } m(A) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } A \neq \emptyset \text{ ma } m(A) = \emptyset \\ +\infty & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

Def: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice LIMITATO se A è limitato sia superiormente che inferiormente

ESEMPI :

- $A = [2, 3)$ è limitato.
- $A = (-\infty, 5)$ è non è limitato
  perché è sup. limitato ma non inf. limitato
- $\mathbb{N}$ non è limitato
- $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ è limitato.

OSS 1

Se $\exists \max A$ allora $\max A = \sup A$.

OSS 2

Se A è sup. limitato e $\sup A \in A$, allora $\max A = \sup A$.

$$\sqrt{2} := \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2 \}$$

PROPOSIZIONE

Sia $c = \sup \underbrace{\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2 \}}_{= A}$. Allora $c^2 = 2$.

DIM

- $A \neq \emptyset$ perché $1 \in A$ $(c \neq -\infty)$
- A è superiormente limitato. Infatti

  3 è un maggiorante: $3^2 = 9 > 2$ quindi

  se $x \in A \Rightarrow x^2 < 2 < 9 = 3^2 \Rightarrow x < 3$

  (quindi $c \neq +\infty$).

Allora $c \in \mathbb{R}$. Ci sono tre possibilità:

① $c^2 = 2$ ② $c^2 < 2$ ③ $c^2 > 2$

Escludiamo ② e ③.

> Ricordare:
>
> Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ allora:
> - $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$
> - $a < b \iff a^2 < b^2$
>
> Queste affermazioni sono false se non assumiamo che $a, b \geq 0$:
> $-3 < 1$ ma $9 > 1$

- Supponiamo per assurdo che valga ②:

Sia $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$. Allora

$$(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 \overset{(\varepsilon<1)}{<} c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon$$
$$= c^2 + \varepsilon(2c+1)$$

Se scegliamo $0 < \varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$ allora

$$(c+\varepsilon)^2 < c^2 + \varepsilon(2c+1) < c^2 + \frac{2-c^2}{\cancel{2c+1}}\cancel{(2c+1)}$$
$$= \cancel{c^2} + 2 - \cancel{c^2} = 2$$

Allora $(c+\varepsilon)^2 < 2$ e $c+\varepsilon > c > 0$

Quindi $c+\varepsilon \in A$.

Ma $c = \sup A \implies c \geq c+\varepsilon > c$. ↯ assurdo.

- Per assurdo supponiamo $c^2 > 2$.

Sia $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < c$. Allora

$$(c-\varepsilon)^2 = c^2 - 2\varepsilon c + \varepsilon^2 > c^2 - 2\varepsilon c$$

Se scegliamo $0 < \varepsilon < \frac{c^2-2}{2c}$ allora $-2\varepsilon c > -(c^2-2)$
$= 2 - c^2$

Quindi:

$$(c-\varepsilon)^2 > c^2 \underbrace{- 2\varepsilon c} > \cancel{c^2} + 2 - \cancel{c^2} = 2$$

$\forall x \in A$, $x^2 < 2 < (c-\varepsilon)^2 \implies x < c-\varepsilon$.

$c-\varepsilon$ è un maggiorante per A: $c-\varepsilon \in M(A)$.

Ma $c-\varepsilon < c \;\wedge\; c = \min M(A)$ ↯ Assurdo

Sicuramente vale la possibilità ①: $c^2 = 2$. $\square$

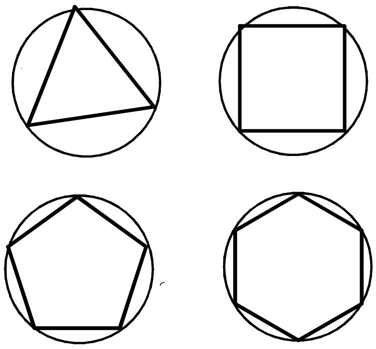
La nozione di sup consente di definire altri numeri:

- Numero di Nepero

$$e := \sup\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} > 0 \right\} \qquad e = 2,71\ldots$$

- $\pi = \sup\{ P_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \}$

dove P_n è il semiperimetro del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza di raggio 1.



$\pi = 3,14\ldots\ldots$

$\pi = 3,14\ldots\ldots$

$\pi \simeq 3,14$

$\cancel{\pi = 3,14}$

- Abbiamo dimostrato che:

$(\sqrt{2})^2 = 2$

Naturalmente, anche $(-\sqrt{2})^2 = 2$.

OSS

L'equazione $x^2 = 2$ ha $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ come uniche soluzioni reali.

DIM

$$x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$$
$$\iff (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$$
$$\text{(legge di annullamento del prodotto)} \iff x+\sqrt{2} = 0 \;\vee\; x-\sqrt{2} = 0$$
$$\iff x = -\sqrt{2} \;\vee\; x = \sqrt{2}.$$

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Allora $\exists!\, x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ t.c. $x^2 = y$. Tale numero si dice RADICE QUADRATA di y.

Ricordare: $\sqrt{y}$ è definito solo se $y \geq 0$
$\sqrt{y} \geq 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R},\ y \geq 0.$

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq 0$ e $x^n = y$. Tale numero si indica con $\sqrt[n]{y}$ (RADICE n-ESIMA di y)

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y < 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n dispari. Allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x < 0$ e $x^n = y$.
Indicheremo questo numero con $\sqrt[n]{y}$.

Ricordare:
- Se n è pari: $\sqrt[n]{y}$ è definita solo per $y \geq 0$
  $\sqrt[n]{y} \geq 0$.
- Se n è dispari: $\sqrt[n]{y}$ è definita $\forall\, y \in \mathbb{R}$.
  $\sqrt[n]{y}$ ha lo stesso segno di y

$\sqrt[4]{-16}$ non è definito!

$\sqrt[3]{-8} = -2$

$\sqrt{(-2)^2} = 2$

$\parallel$

$\sqrt{4}$

Nota: $\sqrt{x^2} \neq x$

- Valore assoluto di un numero reale:

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$ definiamo **VALORE ASSOLUTO** di x il numero $|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

ESEMPI:

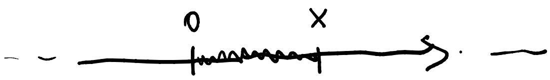
$|-2| = 2$ $\quad |-30| = 30$ $\quad |-3| = 3$

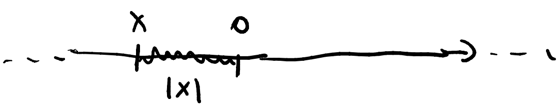
$|5| = 5$ $\quad |0| = 0$

> **OSS**
>
> - $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{x^2} = |x|$
> - Se $n \in \mathbb{N}$, n pari: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
> - Se $n \in \mathbb{N}$, n è dispari: $\sqrt[n]{x^n} = x$

OSS

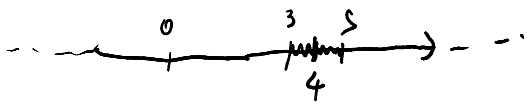
$|x|$ rappresenta la distanza di x da 0 sulla retta reale (la lunghezza del segmento tra x e 0)





Più in generale, dati $x, y \in \mathbb{R}$, la distanza tra x e y sulla retta reale è $|x-y|$.

$(3,5) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| < 1\}$



PROPRIETÀ DEL VALORE ASSOLUTO:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| = 0 \iff x = 0$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|xy| = |x||y|$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$
(proprietà triangolare)

Attenzione: $|x+y| \neq |x|+|y|$:
$x = 1$ $\quad x+y = -1$
$y = -2$ $\quad |x+y| = 1$
$|x| + |y| = 1+2 = 3$

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ si ha:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

6) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{R}$:
$|x| \leq r \iff x \leq r \wedge x \geq -r$
$(-r \leq x \leq r)$

Se $r \geq 0$
$\iff x \in [x-r, x+r]$

7) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{R}$:
$|x| \geq r \iff x \geq r \vee x \leq -r$.

8) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

$\sqrt{2}$ si può indicare anche con $2^{\frac{1}{2}}$.

Potenze con esponente razionale o irrazionale:

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$. Siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Se m è pari richiediamo anche che $y \geq 0$. Definiamo

$$x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n} = \sqrt[m]{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x} \quad (n \text{ volte})$$

Se inoltre $x \neq 0$. Possiamo definire

$$x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \quad \text{e} \quad x^0 = 1.$$

- $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
- $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$
- $10^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10000}}$

Che vuol dire 2^{π} ?

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Sia $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $y > 0$.
Possiamo scrivere $y = n, a_1 a_2 \dots\dots$. Definiamo

$$x^y := \begin{cases} \sup\{ x^{n,a_1\dots a_k} \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\} & \text{se } x > 1. \\ \inf\{ x^{n,a_1\dots a_k} \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Se inoltre $x \neq 0$. Definiamo

$$x^{-y} := \frac{1}{x^y} \quad \text{e} \quad x^0 = 1.$$

ES

$$2^{-\pi} = \frac{1}{2^{\pi}}$$

PROPRIETA' DELLE POTENZE

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0, y > 0$. Siano $r, s \in \mathbb{R}$.
Allora:

1) $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$
2) $(xy)^r = x^r y^r$
3) $(x^r)^s = x^{rs}$

4) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

5) $x^n > 0$, $x^0 = 1$, $1^n = 1$.

6) $x^n > 1 \iff (x>1 \wedge n>0) \vee (0<x<1 \wedge n<0)$

$x^n < 1 \iff (x<1 \wedge n>0) \vee (x>1 \wedge n<0)$

7) $n < s \Rightarrow \begin{cases} x^n < x^s & \text{se } x>1 \\ x^n > x^s & \text{se } x<1 \end{cases}$

8) $0<x<y \Rightarrow \begin{cases} x^n < y^n & \text{se } n>0 \\ x^n > y^n & \text{se } n<0 \end{cases}$

9) Se $x \neq 1$, allora : $x^n = x^s \iff n = s$

ESEMPI

- $\frac{(5^2 \cdot 5^3)^8}{5^{15}} = \frac{(5^5)^8}{5^{15}} = \frac{5^{40}}{5^{15}} = 5^{40} \cdot 5^{-15} = 5^{25}$

- $2^8\, 6^{-4}\, 3^2 = 2^8\, (2 \cdot 3)^{-4} \cdot 3^2 = 2^8\, 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 3^2$

$= 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9}$

- $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{32}$

Attenzione:

- $(a+b)^x \neq a^x + b^x$
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

AD ESEMPIO:
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Invece

$$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$$

<u>ES</u> Risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{3x^2-1} = 1$$

① Condizioni di esistenza:

$$3x^2 - 1 \neq 0$$
$$3x^2 \neq 1$$
$$x^2 = \frac{1}{3}$$
$$x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \ \wedge \ x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

② $\dfrac{1}{3x^2-1} = 1 \iff 1 = 3x^2 - 1$

$\iff 3x^2 = 2$

$\iff x^2 = \dfrac{2}{3}$

$\iff x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \ \vee \ x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

<u>ES</u>

$$(2x-1)(3x-5) = 0$$

$\iff 2x - 1 = 0 \ \vee \ 3x - 5 = 0$

$\iff x = \dfrac{1}{2} \ \vee \ x = \dfrac{5}{3}$

ES

$$(2x-1)(3x-5)=1$$

$$6x^2-10x-3x+5=1$$

$$6x^2-13x+5=1$$

$$6x^2-13x+4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}\right]$$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-4\cdot6\cdot4}}{12}$$

$$=\frac{13\pm\sqrt{169-96}}{12}=\frac{13\pm\sqrt{73}}{12} \begin{array}{l} \dfrac{13+\sqrt{73}}{12} \\ \dfrac{13-\sqrt{73}}{12} \end{array}$$