MATEMATICA LEZIONE 1

lunedì 4 ottobre 2021 08:51

GABRIELE MANCINI
gabriele.mancini@uniba.it

MIRELLA CAPPELLETTI MONTANO
mirella.cappellettimontano@uniba.it

Dipartimento di Matematica
II piano - Ufficio 30

Ricevimento:
Mercoledì 14:30 - 17:30

Programma del corso:

1. Richiami di
   - Insiemi e logica
   - Numeri (insiemi numerici)
   - Funzioni
2. Funzioni di una variabile
   - successioni
   - funzioni reali di variabile reale
     - limiti
     - continuità
     - derivabilità (calcolo differenziale)
     - grafici di funzioni
     - Ottimizzare funzioni
     - Calcolo integrale.
3. Equazioni differenziali

④ Funzioni di più variabili (cenni)

Testi consigliati:

① Bertsch - Dal Passo - Giacomelli
"Analisi matematica"

② Bertsch - Dall'Aglio - Giacomelli
"Epsilon 1 - primo corso di analisi matematica"

Insiemi e Logica

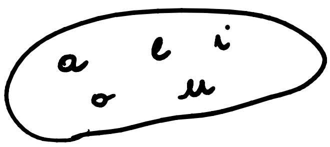
- Un INSIEME è una collezione di oggetti che si dicono ELEMENTI dell'insieme

ESEMPI

$$A := \{1, 14, 17\}$$

simbolo di definizione

$$B := \{a, e, i, o, u\}$$
$$= \{\text{vocali dell'alfabeto}\}$$



$$C := \{ x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari} \}$$

appartenenza

tale che (si può usare anche il simbolo !)

$$= \{ 0, 2, 4, 6, 8 \ldots \}$$

$$= \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Simboli utili:

$\in$ (appartiene) $\quad 14 \in C$

$\notin$ (non appartiene) $\quad 1 \notin C$

$\emptyset$ insieme vuoto

Simboli quantificatori:

$\forall$ (per ogni / ogni)

$\exists$ (esiste)

$\nexists$ (non esiste)

$\exists!$ (esiste ed è unico)

Simboli logici:

$\Rightarrow$ (implica)

$\not\Rightarrow$ (non implica)

$\Leftrightarrow$ se e solo se

$\wedge$ (e) congiunzione logica

$\vee$ (o) disgiunzione logica

$\neg$ (negazione)

Questi simboli si possono combinare tra loro per formare dei predicati matematici.

ESEMPI

- Sia $x \in \mathbb{N}$:

  $\neg$(x è pari) $\iff$ x è dispari

- Ogni numero naturale multiplo di 4 è pari.

  $\forall x \in \mathbb{N}$ t.c. x è multiplo di 4 : x è pari

  $\forall x \in \mathbb{N}$: x multiplo di 4 $\Rightarrow$ x è pari

- Sia $x \in \mathbb{N}$

  $\neg$(x è pari $\vee$ x è multiplo di 3)

  $\Updownarrow$

  $\neg$(x è pari) $\wedge$ $\neg$(x è multiplo di 3)

  $\Updownarrow$

  x è dispari $\wedge$ x non è multiplo di 3

- Siano $a, b \in \mathbb{N}$:

  a è pari $\wedge$ b è pari $\Rightarrow$ a + b è pari

  a è pari $\vee$ b è pari $\not\Leftarrow$ a + b è pari

  a è pari $\vee$ b è pari $\iff$ a b è pari

Def Siano A, B due insiemi. Si dice che A è un **SOTTOINSIEME** di B se tutti gli elementi di A appartengono (anche) a B. (si scrive $A \subseteq B$)

$$\boxed{A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B \iff x \in A \Rightarrow x \in B}$$

- $\nsubseteq$ (non è contenuto)
  $A \nsubseteq B$ significa: $\exists\, x \in A$ t.c. $x \notin B$.

ESEMPIO

$\{1, 14, 18\} \subseteq \mathbb{N}$

$\{1, 14, -1, 72\} \nsubseteq \mathbb{N}$.

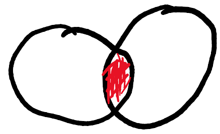
- $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \neq B \iff A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A$
- $A \subsetneq B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Operazioni tra insiemi

- Unione
  $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

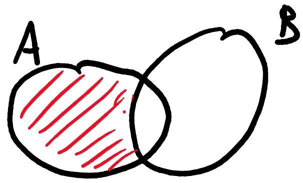
- **Intersezione**

$A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$



- **Differenza**

$A \setminus B := \{ x \in A \mid x \notin B \}$



ESEMPIO:

$A = \{ 1, 14, 18 \}$

$B = \{ 14, 20, -15, 10, 18, a \}$

$A \cup B = \{ 1, 14, 18, 20, -15, 10, a \}$

$A \cap B = \{ 14, 18 \}$

$A \setminus B = \{ 1 \}$

Nota: Si scrive $\{1\}$ non 1

$B \setminus A = \{ 20, -15, 10, a \}$

- **Notazione**: Siano A, X due insiemi t.c. $A \subseteq X$. Il COMPLEMENTARE di A in X è l'insieme $\complement_X(A) := X \setminus A$.

Nel caso in cui $X = \mathbb{R}$ si scrive $\complement(A)$ oppure A^c

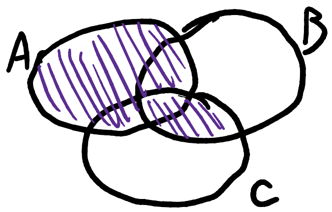
PROPRIETÀ

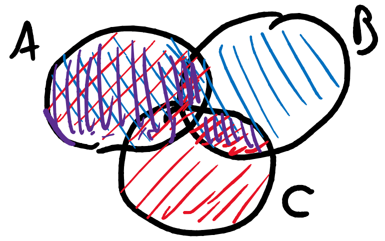
- Siano A, B, C insiemi. Allora:

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *





• Insiemi numerici

1) Numeri naturali:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

In $\mathbb{N}$ si possono fare somme e prodotti

Non si possono fare le differenze.

2) Numeri interi (relativi)

$\mathbb{Z} : \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4 \ldots\}$

In $\mathbb{Z}$ si possono fare somme prodotti e differenze

Si può fare una divisione con resto.

Però l'equazione $4x = 1$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$

3) Numeri razionali

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$

Attenzione:

La rappresentazione dei numeri razionali non è unica

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{-5}{-20}$$

Possiamo anche dire che

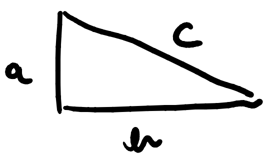
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ MCD(a,b)=1 \right\}$$

$$\frac{22}{4} = \frac{\cancel{2} \cdot 11}{\cancel{2} \cdot 2} = \frac{11}{2}$$

Con i numeri razionali, si possono fare somme prodotti, differenze e quozienti (con denominatore $\neq 0$).

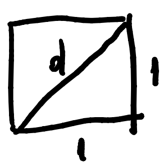
Teorema di Pitagora

Triangolo rettangolo



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Quadrato di lato 1:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

PROPOSIZIONE

$\nexists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$

DIM

Per assurdo, supponiamo che $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

Possiamo supporre $q > 0$.

Allora $q = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ e tali che a e b non sono entrambi pari.

$$q^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ è pari} \Rightarrow a \text{ è pari}$$

$$\Rightarrow \exists\, K \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a = 2K. \quad (*)$$

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2K)^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow 4K^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow 2K^2 = b^2$$

$$\Rightarrow b^2 \text{ è pari} \Rightarrow b \text{ è pari}$$

Abbiamo mostrato che a e b sono entrambi pari ↯ Assurdo. $\square$

Il fatto che la diagonale di un quadrato di lato unitario non possa essere misurata con numeri razionali suggerisce l'esistenza di altri numeri

C'è un altro indizio:

I numeri razionali si possono scrivere come numeri decimali

- $\frac{1}{2} = 0,5$

- $\frac{113}{50}$

$$
\begin{array}{r|l}
113 & 50 \\
\underline{100} & \overline{2,26} \\
130 & \\
\underline{100} & \\
300 & \\
\underline{300} & \\
0 &
\end{array}
$$

Quindi

$$\frac{113}{50} = 2,26$$

- $\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 0,3333.....$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 3 \\
\underline{0} & \overline{0,3333....} \\
10 & \\
\underline{9} & \\
10 & \\
\underline{9} & \\
1 & \\
\vdots &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow 1 = 0,\overline{3}$$

$\frac{2}{15}$

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 15 \\
\underline{0} & \overline{0,1333....} \\
20 & \\
\underline{15} & \\
50 & \\
\underline{45} & \\
5 & \\
\vdots &
\end{array}
$$

$$\frac{2}{15} = 0,1\overline{3}$$

FATTO

Lo sviluppo decimale di un numero razionale è sempre finito o periodico

[Può ripetersi anche un gruppo di più cifre
$0,15\overline{753}$]

Il numero:

$0,1211221112221111 2222......$

Non ha uno sviluppo periodico.

Questo numero non può essere razionale!

---

4) Numeri reali:

$\mathbb{R} := \{ n, a_1 a_2 a_3 \ldots \mid n \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, a_3 \ldots \in \{0, \ldots 9\} \}$

Attenzione:

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$

$0,\overline{9} = 1$

In modo simile $0,123\overline{9} = 0,124$

Curiosità:

- $\frac{1}{3} = 0,\bar{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots\ldots$
- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots = +\infty$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots = +\infty$
- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6}$
- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots = ?$

Le somme infinite sono strane!

Proprietà dei numeri reali:

- $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ $\quad (\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R})$

Def: I numeri reali che non sono razionali si dicono IRRAZIONALI

L'insieme dei numeri irrazionali è $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Proprietà della somma:

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$ (prop. commutativa)
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa)
3) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a$
4) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0$.

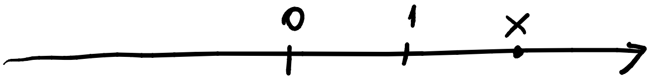
- Proprietà della moltiplicazione

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3) $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$
4) Se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
6) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 0 = 0$
7) legge di annullamento del prodotto:
   $\forall a, b \in \mathbb{R}:$
   $ab = 0 \iff a = 0 \lor b = 0$

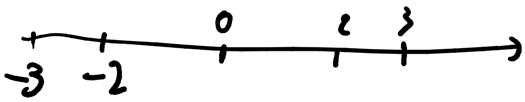
$$\begin{aligned} -(3x+1) &= -1 \cdot (3x+1) \\ &= (-1) \cdot 3x + (-1) \cdot 1 \\ &= -3x - 1 \end{aligned}$$

- I numeri reali sono ordinati:

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
   $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$



2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
   $a \leq b \land c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$
3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
   $a \leq b \land c > 0 \iff ac \leq bc \land c > 0$
4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$
   $a \leq b \land c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$



s) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \leq b \wedge c < 0 \iff ac \geq bc \wedge c < 0$

Nota sul test:

$-2x > 1 \iff x < -\frac{1}{2}$

- **Proprietà di continuità di $\mathbb{R}$ (di Dedekind)**

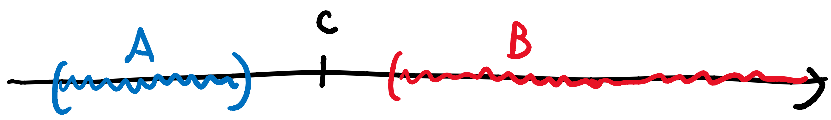
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che

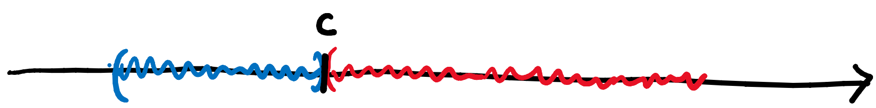
① $A, B \neq \emptyset$

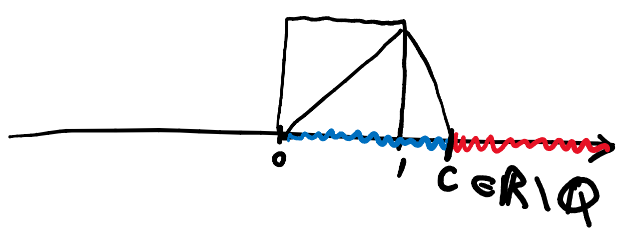
② $\forall a \in A, b \in B$: $a \leq b$.

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A, b \in B$:

$a \leq c \leq b$.







- **Proprietà di Archimede:**

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > x$.

- **Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:**

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$ $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $a < q < b$.

- C'è una classe speciale di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Intervalli:

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ denotiamo:

$[a,b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

$(a,b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

$[a,b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$

$(a,b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

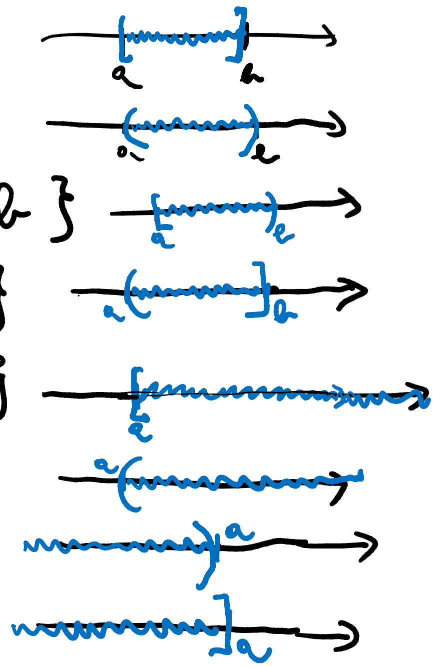
$[a,+\infty) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$

$(a,+\infty) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$

$(-\infty, a) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$

$(-\infty, a] := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$

$(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}$



Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, il **MASSIMO** di A è il più grande degli elementi di A. Si indica con $\max A$.

oss

$x = \max A \iff x \in A \wedge x \geq a \ \forall a \in A$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, il **MINIMO** di A è il più piccolo degli elementi di A (e si indica con $\min A$)

oss

$x = \min A \iff x \in A \wedge x \leq a \ \forall a \in A.$

Nota: Il max e il min di un insieme non sempre esistono!

ESEMPI

$A = [a, b)$

$\nexists \max A$

$\min A = a$

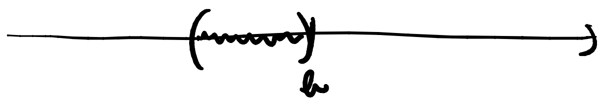
- $A = [a, b] \Rightarrow \max A = b \wedge \min A = a$
- $A = (15, +\infty) \Rightarrow \nexists \max A \wedge \nexists \min A$.

OSS

Se A è finito e non vuoto allora $\exists \max A$ e $\min A$.

$A = \{-1, 15, -17, 200\}$

$\max A = 200$ e $\min A = -17$



Def: Sia A un insieme e sia $x \in \mathbb{R}$. Si dice che x è un MAGGIORANTE per A se $x \geq a \quad \forall a \in A$.

L'insieme dei maggioranti di A si indica con $M(A)$.

Def: Sia A un insieme e sia $x \in \mathbb{R}$.
Si dice che x è un **MINORANTE** per A se
$x \leq a \quad \forall\, a \in A$. L'insieme dei minoranti
di A si indica con $m(A)$

ES

$$A = \{0, 1, 14, \}$$

100 è un maggiorante
20 è un maggiorante
18 è un maggiorante di A.

0 è un minorante
-1 è un minorante

ES

- $A = [0, 1) \cup \{-1\}$

$$\mathcal{M}(A) = [1, +\infty)$$
$$m(A) = (-\infty, -1]$$

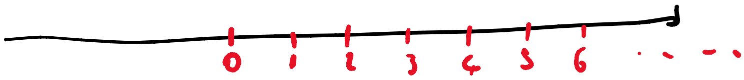
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots \}$

$$m(\mathbb{N}) = (-\infty, 0]$$
$$\mathcal{M}(\mathbb{N}) = \emptyset$$

Def: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **SUPERIORMENTE LIMITATO** se $\exists$ un maggiorante per A $(\mathcal{M}(A) \neq \emptyset)$

Si dice che A è **INFERIORMENTE LIMITATO** se $\exists$ un minorante per A.

. $\mathbb{N}$ è inferiormente limitato ma non superiormente limitato.



Def: Sia A un insieme, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato. Definiamo **ESTREMO SUPERIORE DI A** il minimo di $\mathcal{M}(A)$.

TEOREMA

Sia A un insieme non vuoto e sup. lim. Allora $\exists$ l'estremo superiore di A.

<u>DIM</u>

A, $B = \mathcal{M}(A)$.

① $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

② $\forall a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b$

$\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$.

Allora $c \geq a \quad \forall a \in A \Rightarrow c \in \mathcal{M}(A)$

e $c \leq b \quad \forall b \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow c = \min \mathcal{M}(A)$.

c è l'estremo superiore di A.

Def Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto e inf. lim. si definisce **ESTREMO INFERIORE** di A il massimo $m(A)$.

L'estremo superiore e quello inferiore si indicano rispettivamente con $\sup A$ e $\inf A$.

- Più in generale possiamo definire

$$\sup A = \begin{cases} \min \mathcal{M}(A) & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } A \text{ è sup. lim} \\ +\infty & \text{se } A \text{ non è sup. lim.} \\ -\infty & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

<u>ES</u>

- $A = (a, b)$ o $[a, b]$ o $(a, b]$ o $[a, b)$

allora $\sup A = b \wedge \inf A = a$

- $A = \mathbb{N} \Rightarrow \sup \mathbb{N} = +\infty \wedge \inf A = 0$.

- $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \}$

$\sup A = 1 = \max A$

$\inf A = 0$ perché $m(A) = (-\infty, 0]$

- Sia $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0, \ x^2 < 2 \}$

Possiamo definire $\sqrt{2} := \sup A$.