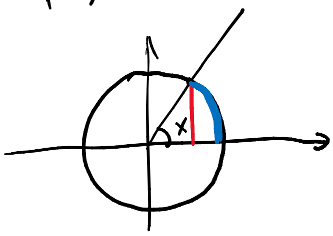
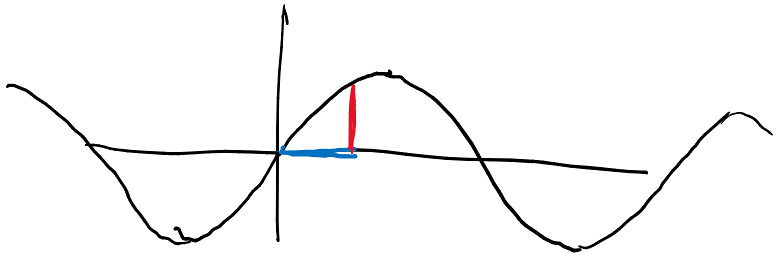
MATEMATICA LEZIONE 7

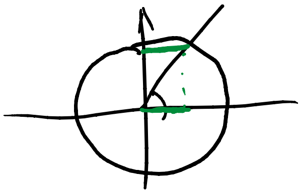
mercoledì 20 ottobre 2021 08:58

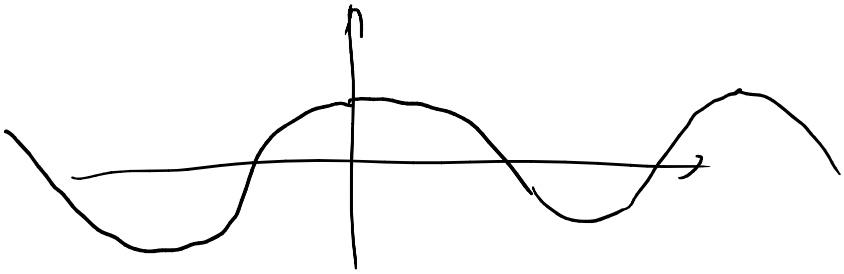
- $f(x) = \sin x$



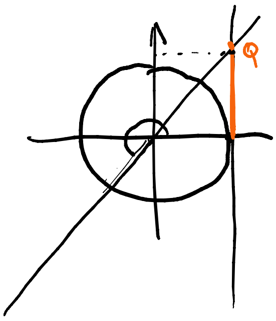


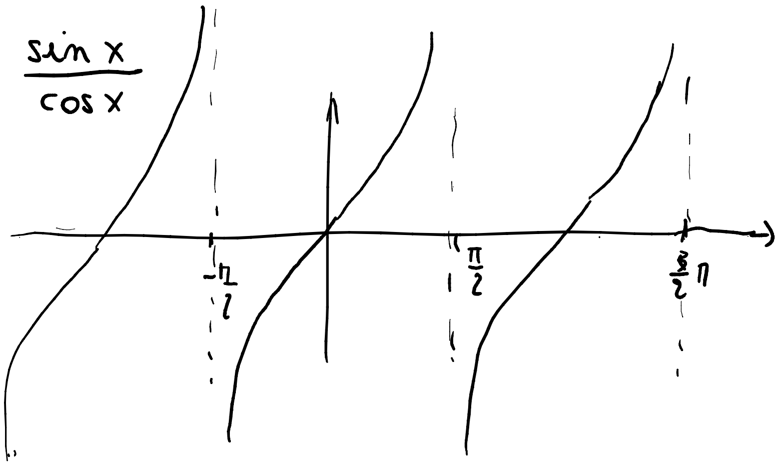
- $f(x) = \cos x$





- $f(x) = tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$





$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

f è periodica di periodo π

f è dispari:

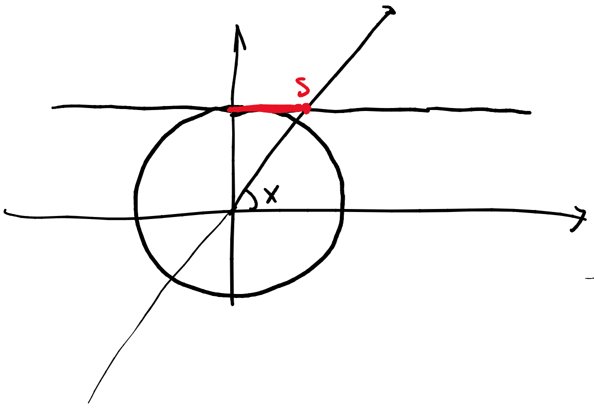
$$tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tg\, x$$

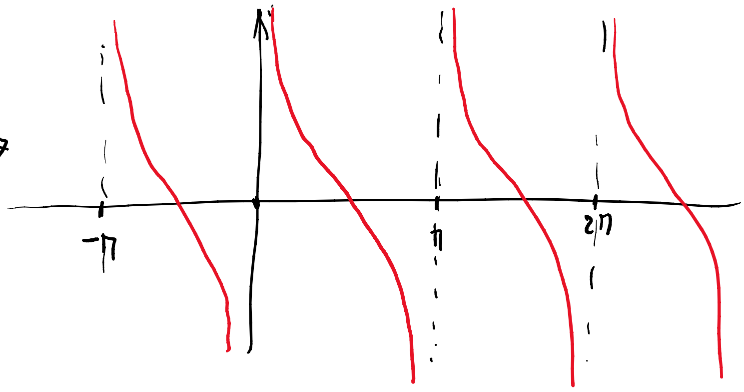
- $f(x) = cotg\, x$ $\quad$ ($cot\, x$, $cotan\, x$)

$:= \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

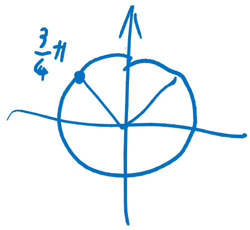




- f è una funzione periodica di periodo π
- f è dispari

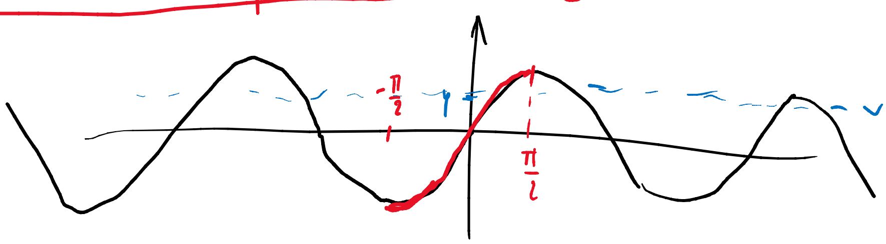
OSS

- $x = 0 \Rightarrow \text{tg}\, 0 = 0$
- $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{tg}\, x = 1$
- $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{1}{2} \Big/ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Big/ \frac{1}{2} = \sqrt{3}$
- $x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \text{tg}\, \frac{3}{4}\pi = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$



Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche:

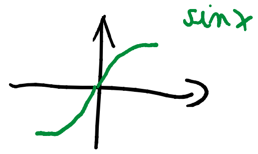
- $f(x) = \sin x$



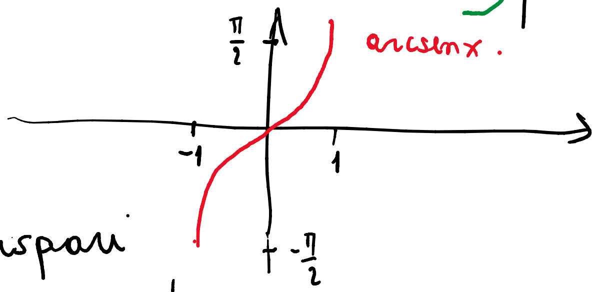
$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{è biettiva}$$
$$x \longmapsto \sin x$$

la sua funzione inversa è detta funzione ARCOSENO (arcsin x).

$$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y \longmapsto \text{l'unico } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ t.c. } \sin x = y$$



$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = [-1, 1]$$
$$\mathrm{Im}(f^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



- arcsin x è una funzione dispari
- arcsin x è strettamente crescente
- arcsin x è l'unico angolo in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ il cui seno è x
- $\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

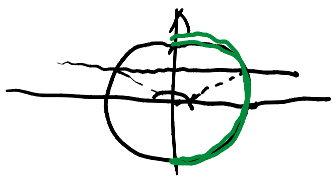
  $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

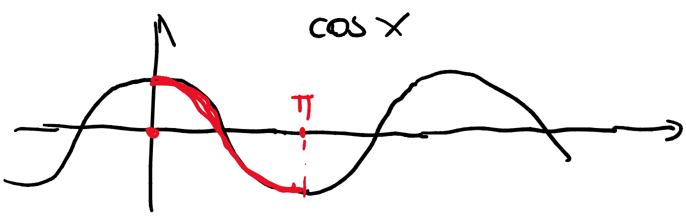
  però $\arcsin(\sin x) \neq x$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

  Ad esempio $x = \frac{5}{6}\pi$

  $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

  ma $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$



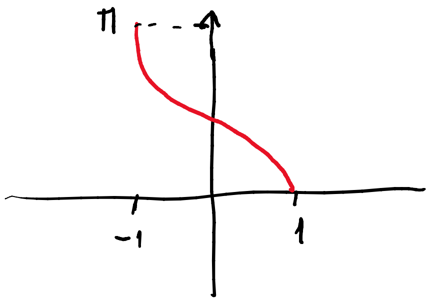
- 

cos x è una funzione biettiva da $[0, \pi]$ in $[-1, 1]$. La sua funzione inversa è detta ARCOCOSENO (arccos x).

$f(x) = \arccos x$

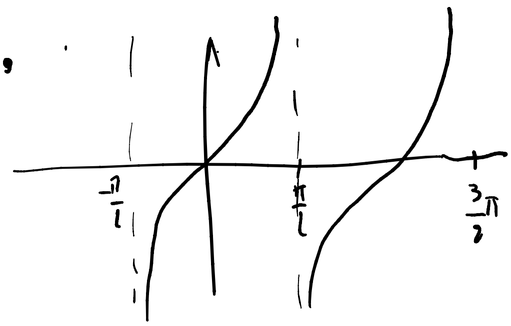
$\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$

$\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$



f è strettamente decrescente.

$\arccos x$ è l'unico angolo in $[0, \pi]$ il cui coseno è x.



$\operatorname{tg} x$ è una funzione biettiva da $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in $\mathbb{R}$ la sua inversa è detta

ARCOTANGENTE

Se $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (o $\arctan x$)

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

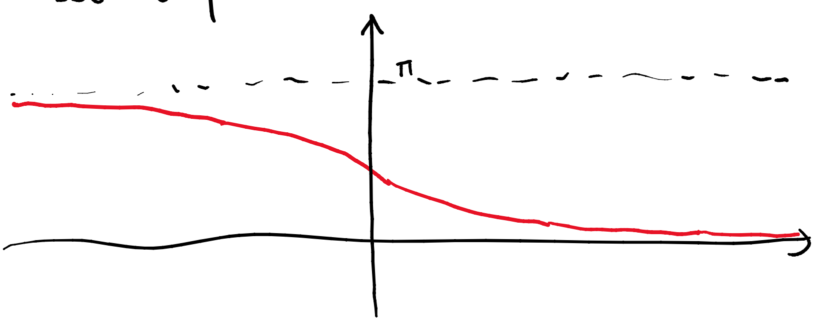
$\mathrm{Im}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

- $\operatorname{arctg} x$ è l'unico angolo in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la cui tangente è x.
- $\operatorname{arctg} x$ è una funzione dispari
- $\operatorname{arctg} x$ è strettamente crescente
- In modo simile si definisce l'ARCOCOTANGENTE

$f(x) = \operatorname{arccotg} x$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = (0, \pi)$

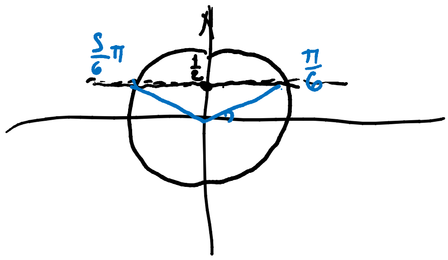


OSS (Alcuni valori di $\arctg x$)

- $\arctg 0 = 0$
- $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$
- $\arctg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
- $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
- $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Esempi di equazioni e disequazioni trigonometriche

1) Risolvere $\sin x = \frac{1}{2}$



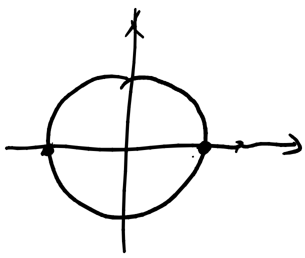
$x = \frac{\pi}{6} \ \vee \ x = \frac{5}{6}\pi \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$

cioè

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$

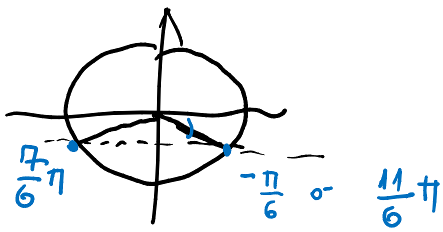
2) $2\sin^2 x + \sin x = 0$

$\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$



$\sin x = 0 \quad \vee \quad 2\sin x + 1 = 0$

$x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2}$



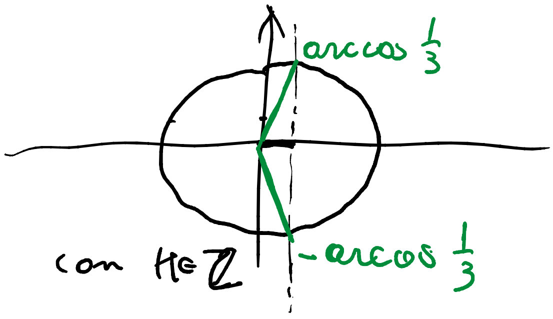
$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

Le soluzioni dell'equazione sono

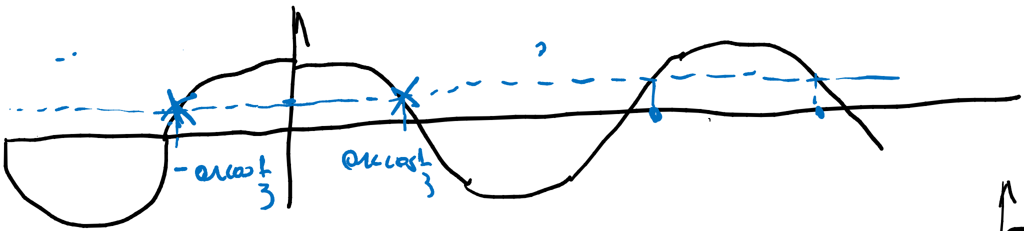
$$x = k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

3) $\cos x = \frac{1}{3}$



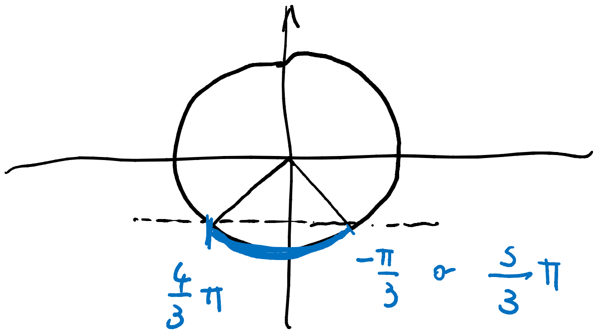
$x = \arccos\frac{1}{3} + 2k\pi$

o $x = -\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$



4) $-2\sin x \geq \sqrt{3}$

$\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



soluzioni:

$\frac{4}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi \quad (\text{mod } 2\pi)$

cioè

$\frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

Formula utile:

- Se $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e se $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, allora:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

IDEA:

$$\sin x = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2t\cdot\frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Trasformazioni elementari dei grafici

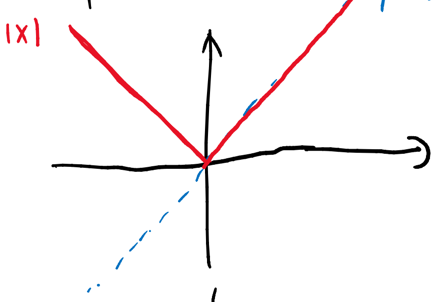
- Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ una funzione:

- VALORE ASSOLUTO di $f(x)$

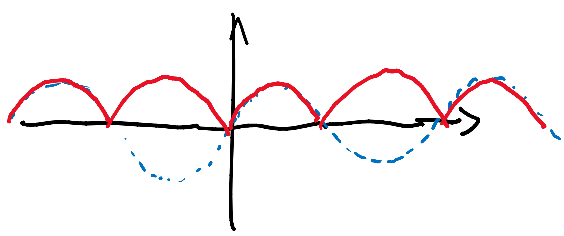
$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene dal grafico di $f(x)$ ribaltando rispetto all'asse x le parti del grafico di f che corrispondono a valori negativi di f

$f(x) = |x|$



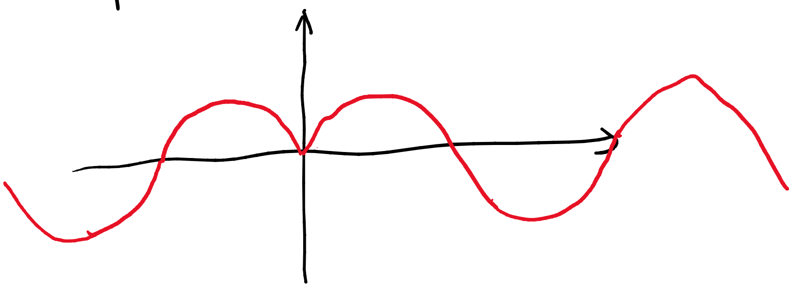
$f(x) = |\sin x|$



Non si deve confondere $|f(x)|$ con $f(|x|)$

Il grafico di $f(|x|)$ si ottiene disegnando il grafico di f solo per $x \geq 0$ e poi estendendo per simmetria rispetto all'asse y.

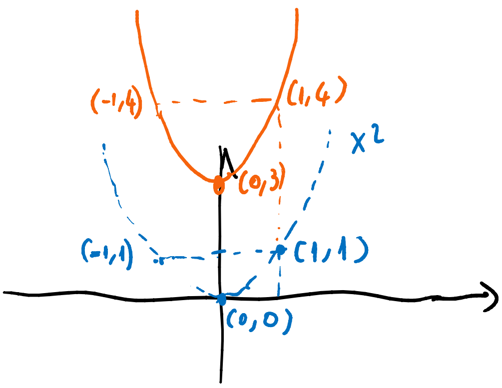
$f(x) = \sin(|x|)$



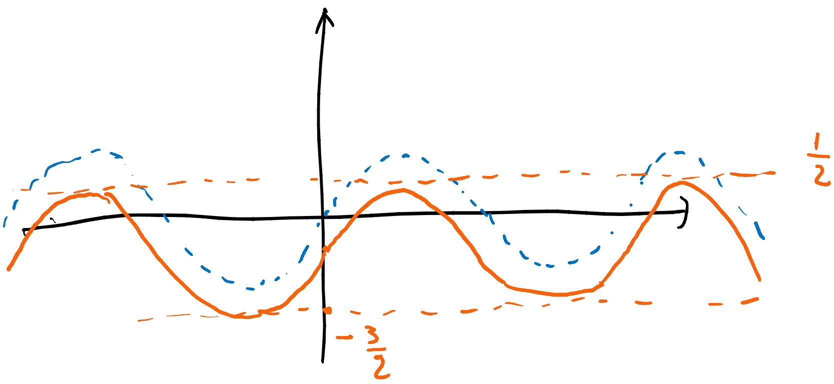
- **Traslazioni verticali** (traslazioni della variabile dipendente)

Dato $c \in \mathbb{R}$ il grafico di $f(x) + c$ si ottiene traslando verticalmente di c il grafico di f.

$f(x) = x^2 + 3$



$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$

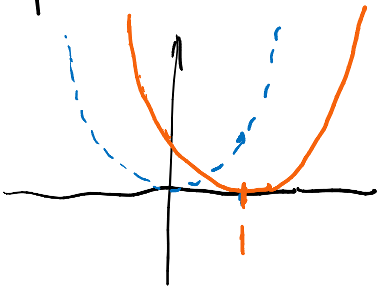


- **Traslazioni orizzontali** (traslazioni della variabile indipendente)

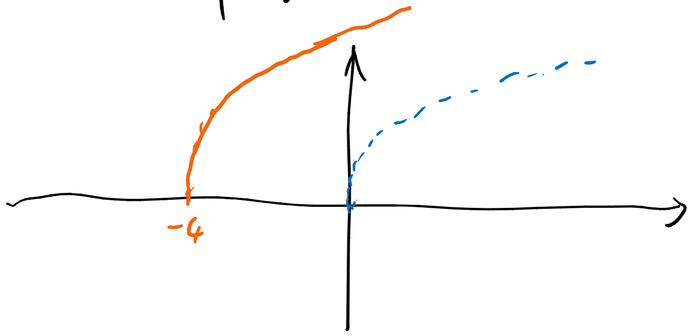
Dato $c \in \mathbb{R}$ il grafico di $f(x + c)$ si ottiene dal grafico di f traslando orizzontalmente di $-c$

ES:

$f(x) = (x-1)^2$



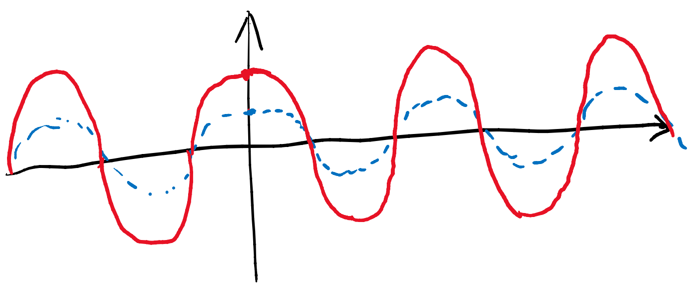
$f(x) = \sqrt{x+4}$



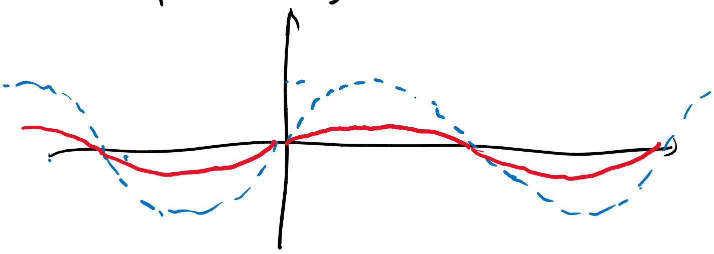
• Riscalamenti verticali (o della variabile dipendente)

Dato $A \in \mathbb{R}$, il grafico di $A\,f(x)$ si ottiene dal grafico di f riscalando di A verticalmente il grafico di f. (tutte le altezze vanno moltiplicate per A)

$f(x) = 2\cos x$



$f(x) = \frac{1}{3}\sin x$

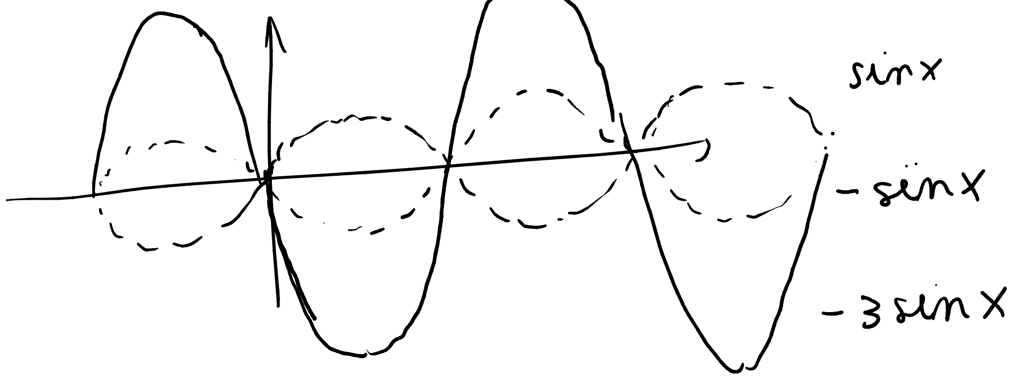


Se $A > 1$ è una dilatazione verticale

Se $0 < A < 1$ è una compressione verticale

Se $A < 0$ oltre a riscalare bisogna ribaltare rispetto all'asse orizzontale:

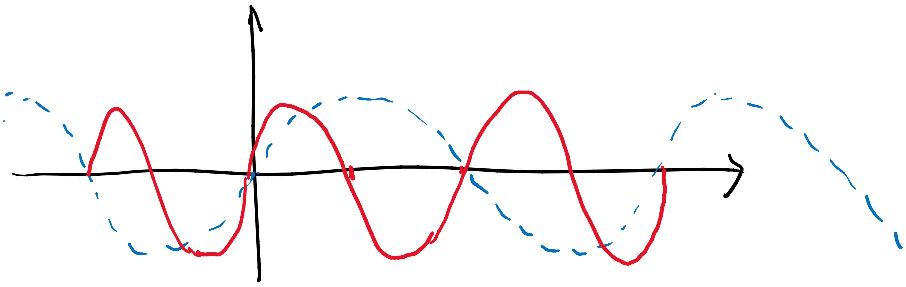
$f(x) = -3\sin x$



- **Riscalamenti orizzontali**

Dato $A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ il grafico di $f(Ax)$ si ottiene dal grafico di f riscalando orizzontalmente di $\frac{1}{A}$

$f(x) = \sin 2x$



- Se $A > 1$ il grafico viene compresso
- Se $0 < A < 1$ il grafico viene dilatato
- Se $A < 0$ il grafico viene riscalato e ribaltato rispetto all'asse y.

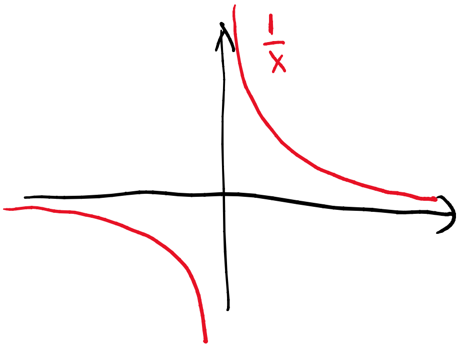
- È possibile comporre queste trasformazioni elementari dei grafici

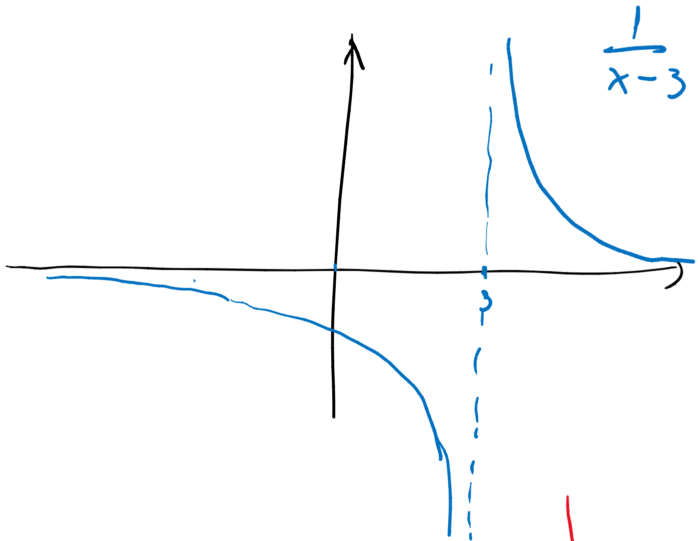
ESEMPIO

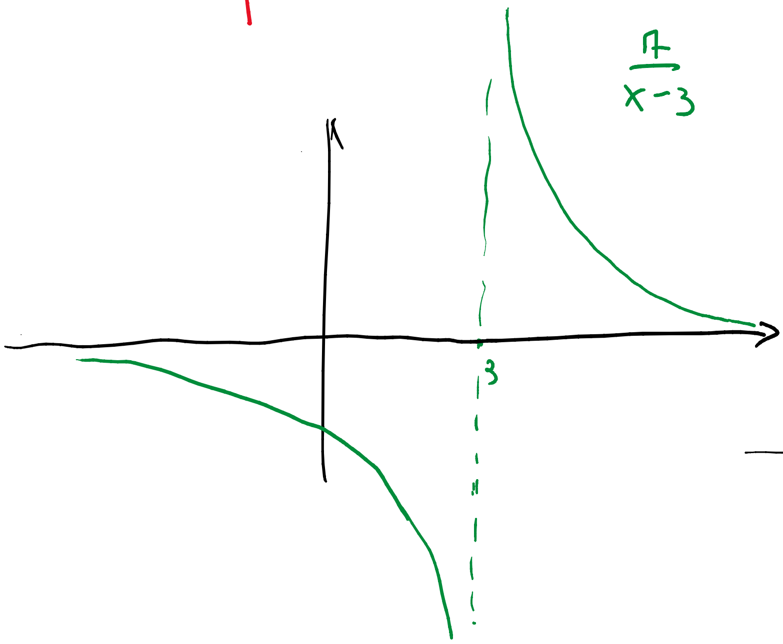
$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2(x-3+3)+1}{x-3} = \frac{2(x-3)+6+1}{x-3}$$

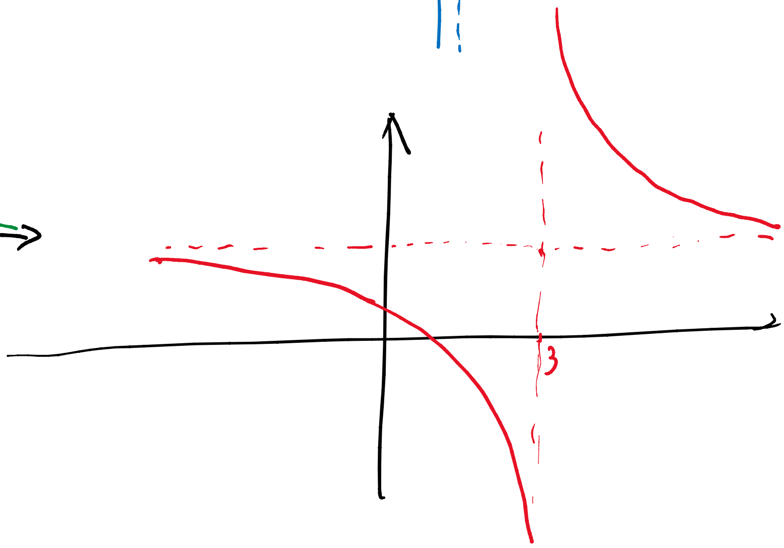
$$= 2 + \frac{7}{x-3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = 2 + 7\,g(x-3) \end{array}}$$









Parabole (polinomi di 2° grado)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

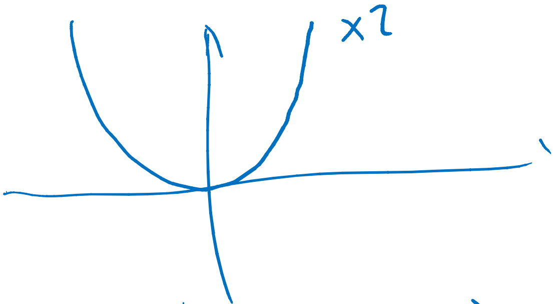
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

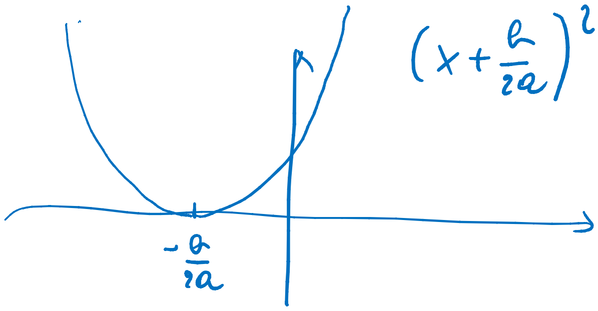
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right)$$

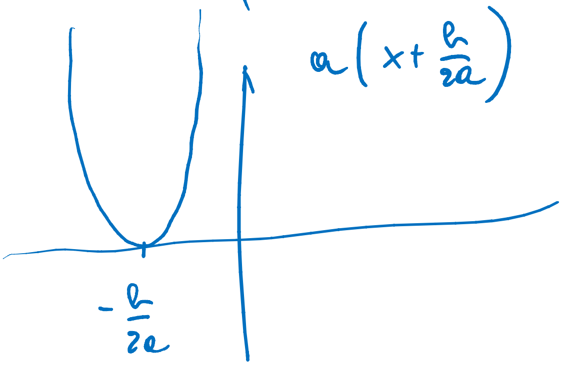
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^{\Delta}}{4a^2}\right)$$

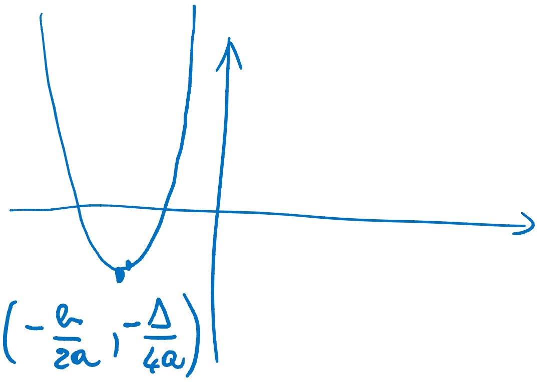
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$









Vertice della parabola: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$