MATEMATICA LEZIONE 6

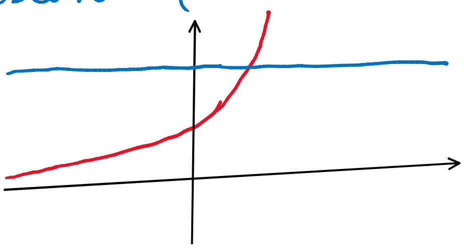
lunedì 18 ottobre 2021 10:08

Nella scorsa lezione abbiamo introdotto le funzioni e abbiamo studiato alcune proprietà di base:

- Dominio / codominio / immagine
- iniettività / suriettività / biettività
- funzioni monotone: crescenti / decrescenti (strettamente o no)
- Simmetrie: pari e dispari
- funzioni limitate: sup e inf.

OSS

Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Se f è strettamente crescente (o decrescente) allora è iniettiva.



Composizione di funzioni:

Def Siano $f: X \longrightarrow Y$, $g: Z \longrightarrow W$ due funzioni.

Se $f(X) \subseteq Z$ possiamo definire la funzione $g \circ f$ definita da: COMPOSIZIONE DI f E g

$$g \circ f: \begin{array}{l} X \longrightarrow W \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

si calcola prima $f(x)$ e poi si calcola il valore di g in $f(x)$

ESEMPIO:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \frac{1}{x} \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x^2+1 \end{array}$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{2}{x^2} + 1$$

Nota: $g \circ f \neq f \circ g$

$Im(g) = [1, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ possiamo calcolare anche $f \circ g$

e $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longrightarrow \frac{1}{2x^2+1}$$

- ESEMPIO 2

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x-3| + 2$ $\qquad$ $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$

Come è fatta $g \circ f$?

$f(\mathbb{R}) = [2, +\infty) \subseteq [0, +\infty) = Dom(g)$

Possiamo fare la composizione $g \circ f$:

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \sqrt{|x-3| + 2}$$

ESEMPIO 3

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad$ idea: $g \circ f(x) = \frac{1}{x+1}$ non è definita se $x = -1$

Per fare la composizione di f e g bisogna restringere il dominio di f.

$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x+1$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$

Ma $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = Dom(g)$.

La composizione è ben definita e

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x+1}.$$

Funzione inversa:

Def Sia $f : X \longrightarrow Y$ biettiva. Allora $\forall y \in Y \; \exists! x \in X$ tale che $f(x) = y$. Allora possiamo definire FUNZIONE INVERSA di f la funzione

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X$$
$$y \longrightarrow \text{unico } x \text{ t.c. } f(x) = y.$$

ESEMPI

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x+1$$

E' biettiva?

- è iniettiva:

Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$
$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$
$\Rightarrow x_1 = x_2$

- E' suriettiva:

$\forall y \in \mathbb{R}$: $2x+1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$.

Quindi $\forall y \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y$

La funzione inversa è:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow \frac{y-1}{2}$$

- ESEMPIO

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^3 \end{array}$$

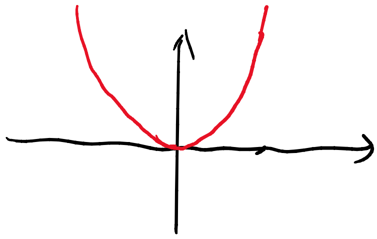
è biettiva e

$$x^3 = y \iff x = \sqrt[3]{y} .$$

La funzione inversa di $f(x) = x^3$ è

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

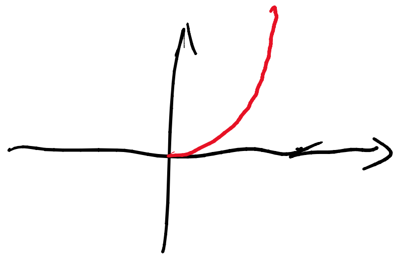
- $$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 \end{array}$$



non è biettiva.

Per poterla invertire vanno modificati dominio e codominio.

$$f : \begin{array}{l} [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty) \\ x \longrightarrow x^2 \end{array}$$

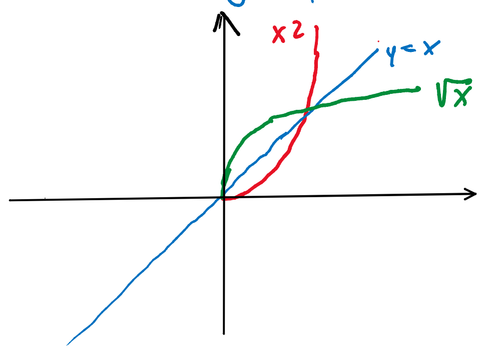


è biettiva quindi si può invertire e

$$f^{-1} : \begin{array}{l} [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty) \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

OSS

Il grafico della funzione inversa di $f : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ si ottiene riflettendo il grafico di f rispetto alla retta $y = x$.



OSS 2

Se $f: X \to Y$ è biettiva e $f^{-1}: Y \to X$ è la sua inversa allora:

- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$
- $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$

Attenzione: vale solo per le funzioni biettive:

- $\sqrt[3]{x^3} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\sqrt[3]{x})^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{x^2} = x$ solo se $x \in [0, +\infty)$ ($\sqrt{x} = -x$ se $x<0$)
- $(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \in [0, +\infty)$

TEOREMA

Se $f: X \to Y$ è strettamente monotona (crescente o decrescente) allora $f: X \to f(X)$ è biettiva.
Inoltre $f^{-1}: f(X) \to X$ è strettamente monotona (dello stesso tipo di f)

Per le funzioni reali di variabile reale spesso non specifichiamo dominio e codominio.
In tal caso si intende che il codominio è $\mathbb{R}$ e che il dominio è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui la funzione è definita (DOMINIO NATURALE)

ES

- $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$

  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

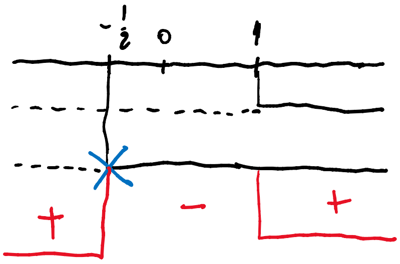
- $f(x) = \sqrt{2x-3}$ c.e.: $x \geq \frac{3}{2}$

  $\mathrm{Dom}(f) = [\frac{3}{2}, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$

- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}$

  Bisogna imporre:

$$\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \quad (*) \\ \dfrac{x-1}{2x+1} \geq 0 \end{cases}$$



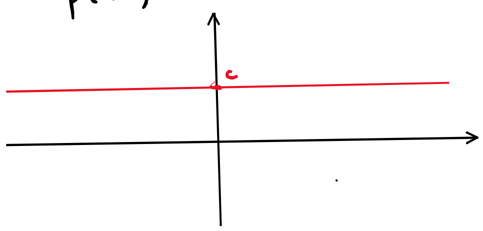
$x \geq 1 \quad \vee \quad x < -\frac{1}{2}$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [1, +\infty)$

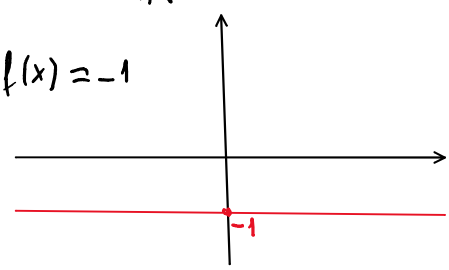
Funzioni elementari:

1) FUNZIONI COSTANTI

$f(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad$ con $\quad c \in \mathbb{R}$



$f(x) = -1$



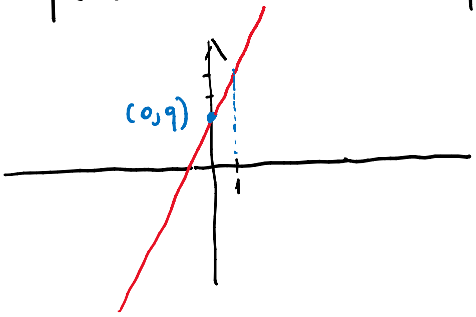
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \{c\}$

si noti anche che le funzioni costanti sono funzioni pari

2) FUNZIONI AFFINI

$$f(x) = mx + q \qquad m, q \in \mathbb{R}.$$



m si dice COEFFICIENTE ANGOLARE

q si dice TERMINE NOTO

$$\mathcal{G}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y = mx + q}_{\text{equazione della retta}} \}$$

- Se $m = 0$ la funzione è costante
- Se $m \neq 0$:

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

f è biettiva

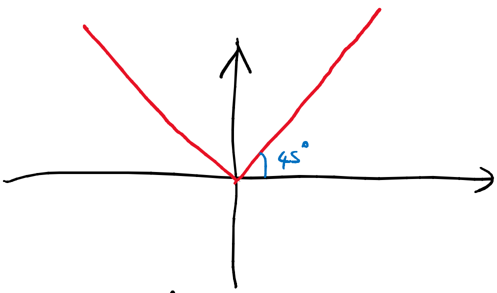
f è strettamente monotona

(crescente se $m > 0$

decrescente se $m < 0$)

3) funzione VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$
- Non è iniettiva né suriettiva
- f è pari:

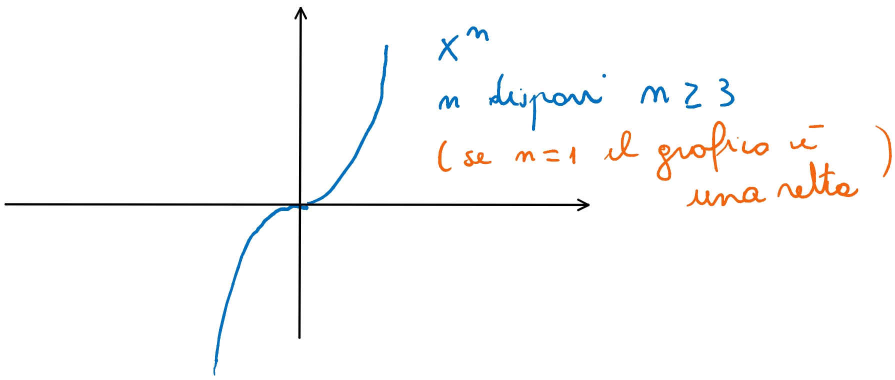
$$|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

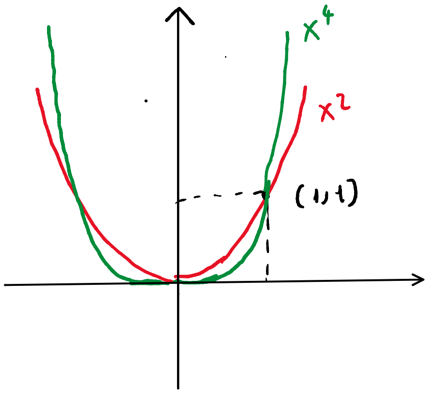
4) POTENZE

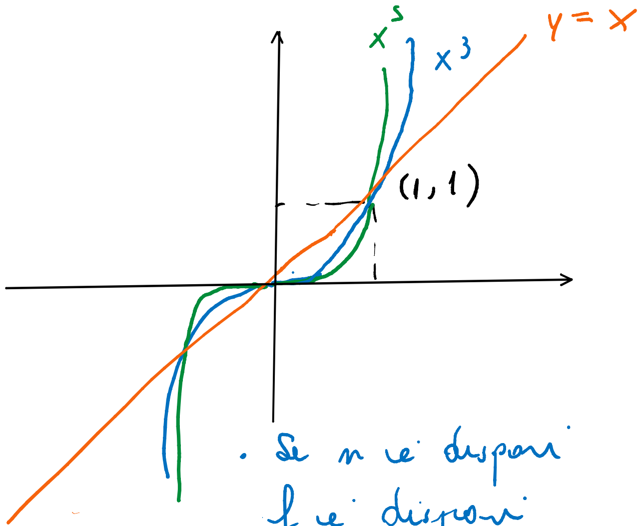
- Potenze (naturali): $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}(f) = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$







se n pari:
f è pari

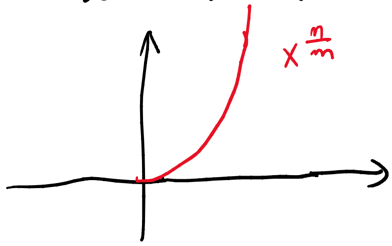
- Se n è dispari
  f è dispari
  f è strettamente crescente
  f è biettiva.

- **Potenze razionali (positive):**

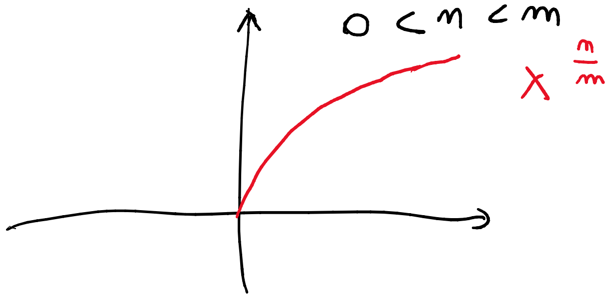
$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad n, m \in \mathbb{N},\ m \neq 0 \quad \mathrm{MCD}(n, m) = 1$$

- Se m è pari (n è dispari)
  $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$
  $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

Se $n > m$



$0 < n < m$



(si noti che se $x \geq 0$:

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = x \quad \text{e} \quad \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x$$

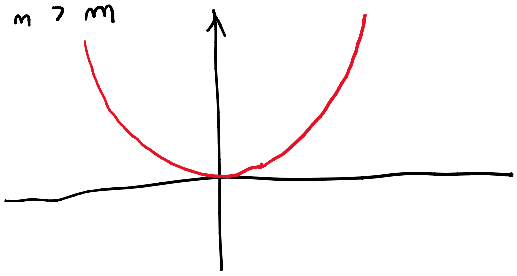
$x^{\frac{n}{m}}$ e $x^{\frac{m}{n}}$ sono uno l'inverso dell'altro)

- Se m è dispari e n è pari

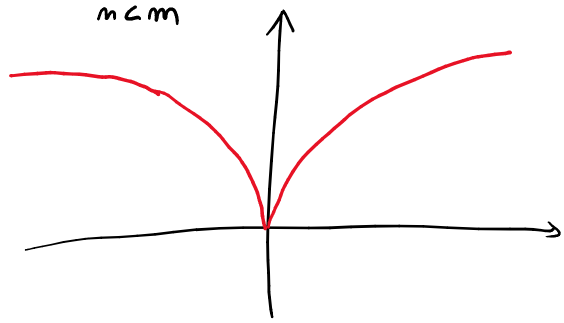
  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

  $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

$n > m$



$n < m$



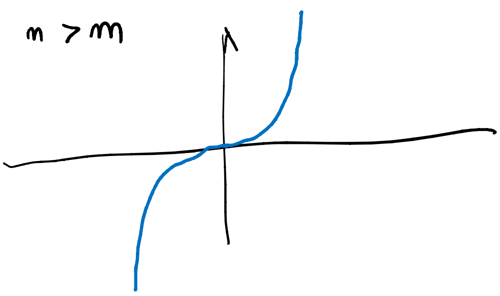
(ad esempio
$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$)

- m e n sono dispari

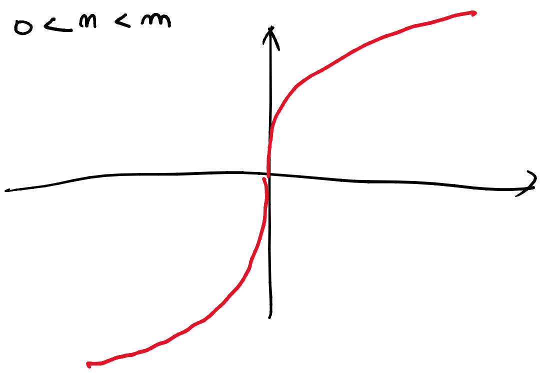
  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

  $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

$n > m$

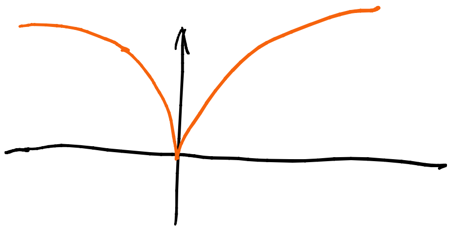


$0 < n < m$

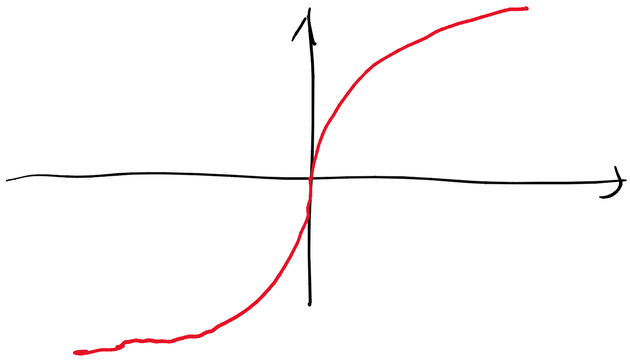


ESEMPI

$f(x) = x^{\frac{4}{5}}$



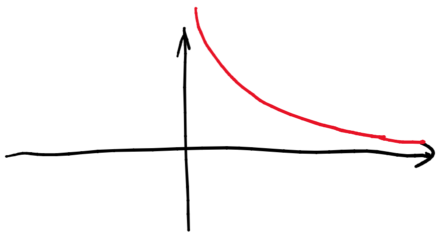
$f(x) = x^{\frac{3}{5}}$



- **Potenze razionali negative** :

$$x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} \quad \text{con} \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \neq 0 \quad MCD(n,m) = 1$$

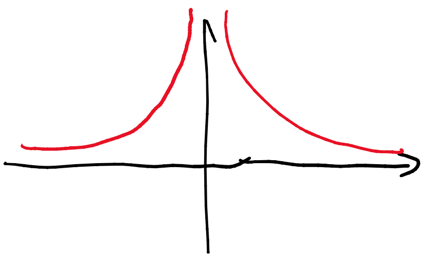
- Se m è pari



$Dom(f) = (0, +\infty)$

$Im(f) = (0, +\infty)$

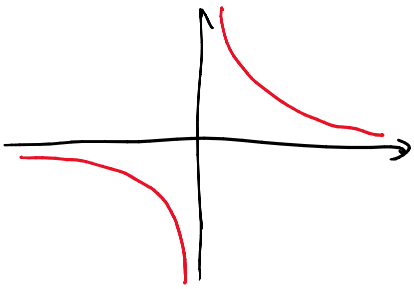
- Se m è dispari e n è pari



$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$Im(f) = (0, +\infty)$

- Se m è dispari e n è dispari



$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

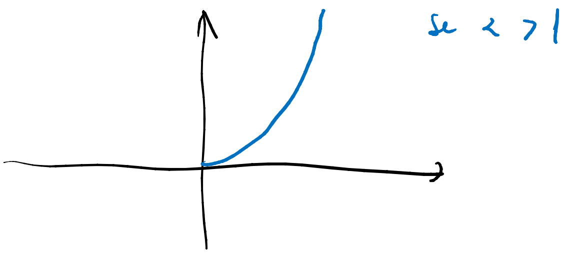
- **Potenze irrazionali**

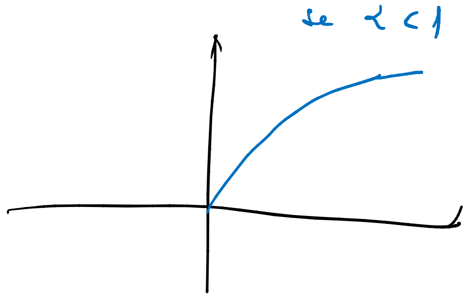
$f(x) = x^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Se $\alpha > 0$

  $Dom(f) = [0, +\infty)$

  $Im(f) = [0, +\infty)$

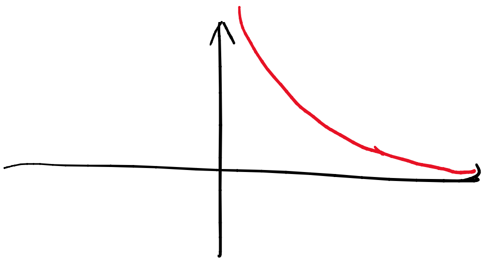




- Se $\alpha < 0$ allora

  $Dom(f) = (0, +\infty)$

  $Im(f) = (0, +\infty)$



5) FUNZIONI ESPONENZIALI

esponente

$$f(x) = a^{x} \quad \text{dove } a \in \mathbb{R},\ a > 0$$

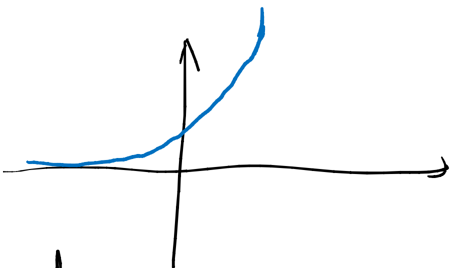
base

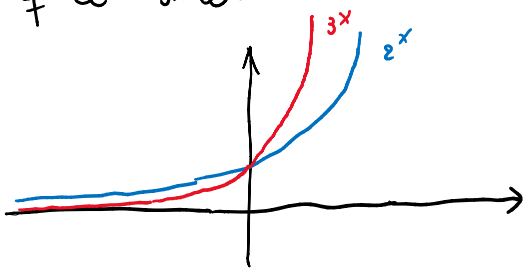
- Se $a = 1$ $f(x) = 1$ è costante
- Se $a > 1$

  $Dom(f) = \mathbb{R}$

  $Im(f) = (0, +\infty)$

  f è strettamente crescente



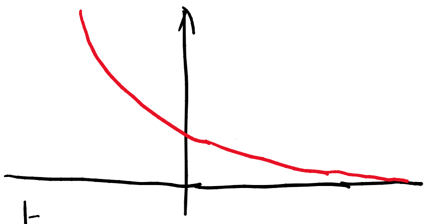


- Se $0 < a < 1$ allora

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (0, +\infty)$

f è strettamente decrescente



6) LOGARITMI :

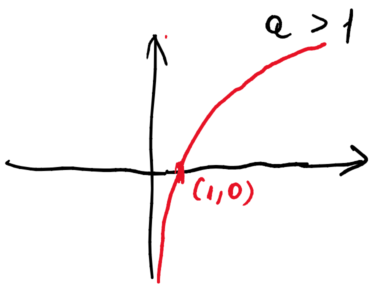
Def: Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, allora a^x è una funzione strettamente monotona e ha immagine $(0, +\infty)$. La funzione inversa di a^x è la funzione LOGARITMO IN BASE a ($\log_a x$)

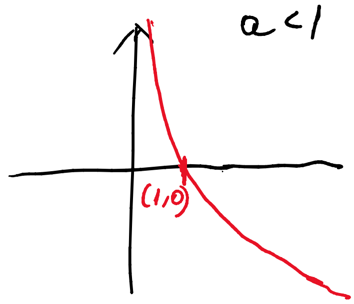
In altri termini, $\log_a x$ è l'esponente da dare ad a per ottenere x.

$f(x) = \log_a x$

$Dom(f) = (0, +\infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$





PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Allora:

1) $a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$

e $\log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\log_a (x y) = \log_a x + \log_a (y)$

$\forall x, y \in (0, +\infty)$

3) $\log_a \frac{1}{x} = - \log_a x \quad \forall x \in (0, +\infty)$

4) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \forall x,y \in (0,+\infty)$

5) $\log_a x^n = n\log_a x \quad \forall x\in(0,+\infty),\ n\in\mathbb{R}.$

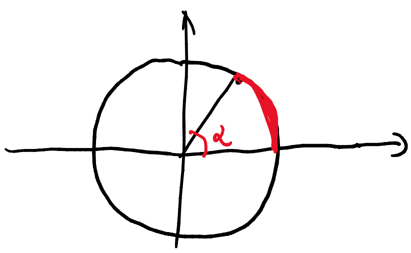
6) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \quad \forall a,b\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$

7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad \forall x,a,b \in (0,+\infty)$, $a,b \neq 1$.

8) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a \frac{1}{a} = -1$

Funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, cotangente)

Misuremo sempre gli angoli in radianti



si identifica α con la lunghezza dell'arco di circonferenza corrispondente.

$\pi \longleftrightarrow 180^\circ$

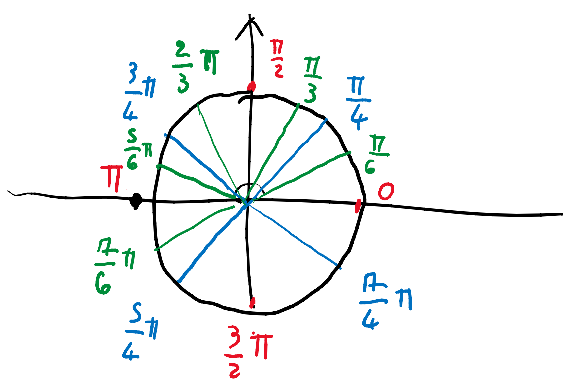
$2\pi \longleftrightarrow 360^\circ$

$\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90^\circ$

$\frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45^\circ$

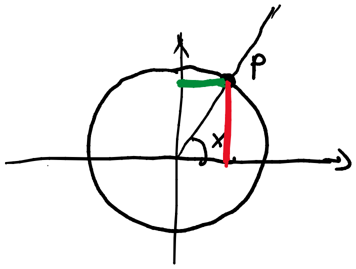
$\frac{\pi}{6} \longleftrightarrow 30^\circ$

$\frac{\pi}{3} \longleftrightarrow 60^\circ$



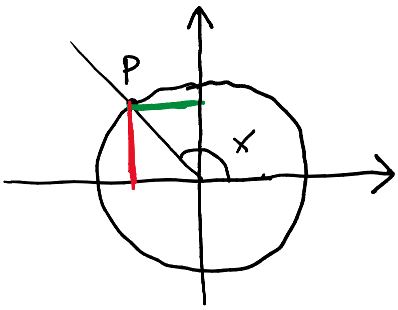
Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 2\pi)$. Sia P il punto di intersezione tra la circonferenza di raggio 1 (centrata nell'origine) e la semiretta uscente dall'origine che forma con l'asse x un angolo pari ad x.

Definiamo COSENO e SENO di x le coordinate del punto P.



$$P = (\cos x, \sin x)$$

Notiamo che $\cos x$ e $\sin x$ hanno un segno

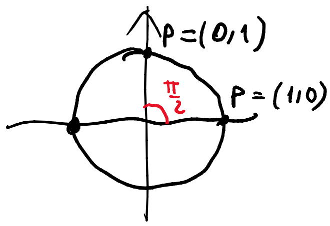


In questo caso:

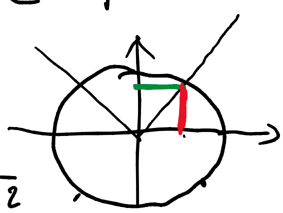
$\cos x < 0$

$\sin x > 0$

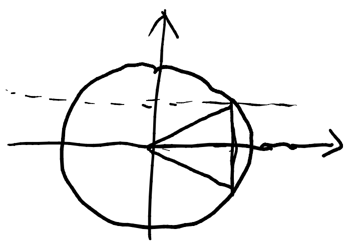
Seno e coseno di angoli noti



- $x = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1, \sin 0 = 0$
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$
- $x = \pi \Rightarrow \cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0$
- $x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$
- $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

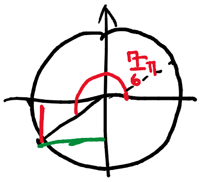


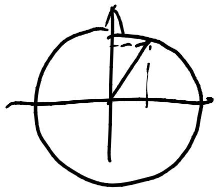
- $x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



- $x = \frac{7}{6}\pi \Rightarrow \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$





Def (seconda parte):

- Se $x \in \mathbb{R}$ allora $\exists\, K \in \mathbb{Z}$ t.c. $x - 2K\pi \in [0, 2\pi)$

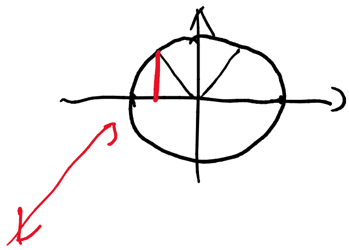
Definiamo $\cos x = \cos(x - 2K\pi)$

$\sin x = \sin(x - 2K\pi)$

ESEMPIO

$\cos(3\pi) = \cos(\pi) = -1$

$\sin\left(\frac{8}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Def: Sia $f: X \to Y$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che f è periodica se $\exists\, T > 0$ tale che

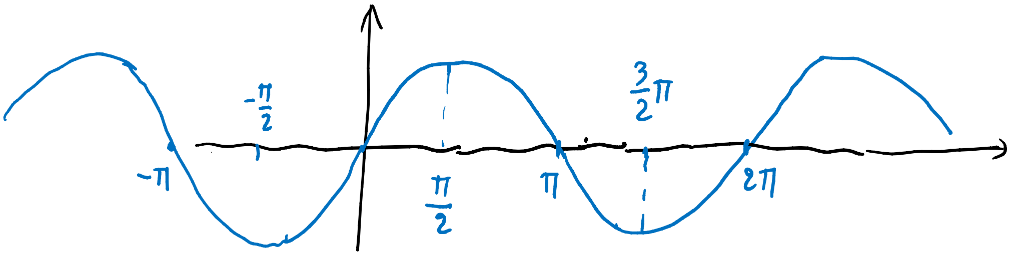
$$\begin{cases} x \in X \Rightarrow x + T \in X \\ f(x+T) = f(x). \end{cases}$$

Il più piccolo T con questa proprietà è detto PERIODO di f.

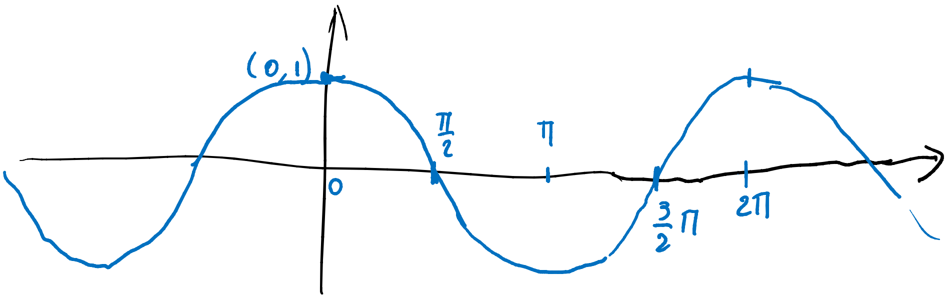
ESEMPI

$\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche (con periodo 2π)

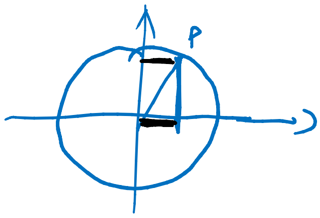
- $f(x) = \sin x$
  $Dom(f) = \mathbb{R}$
  $Im(f) = [-1, 1]$



- $f(x) = \cos x$
  $Dom(f) = \mathbb{R}$
  $Im(f) = [-1, 1]$



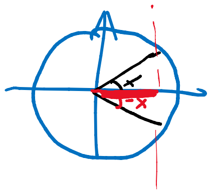
PROPRIETÀ DI $\sin x$ E $\cos x$:



1) $|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$
2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(si scrive $\cos^2 x$ per indicare $(\cos x)^2$
da non confondere con $\cos x^2$ cioè $\cos(x^2)$)

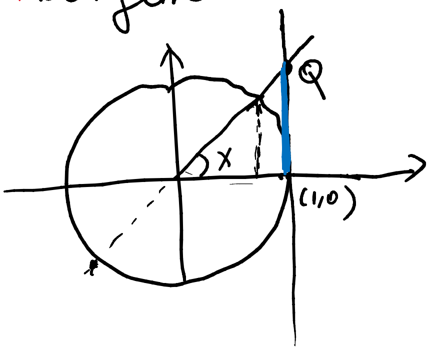
3) $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   $\sin(-x) = -\sin x$
   cioè $\cos x$ è pari
   e $\sin x$ è dispari



FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$
- $\sin(x-y) = -\cos x \sin y + \sin x \cos y$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$

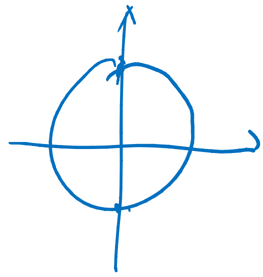
Tangente e cotangente



L'ordinata del punto Q si dice TANGENTE di x ($\operatorname{tg} x$, $\tan x$)

Si vede facilmente che

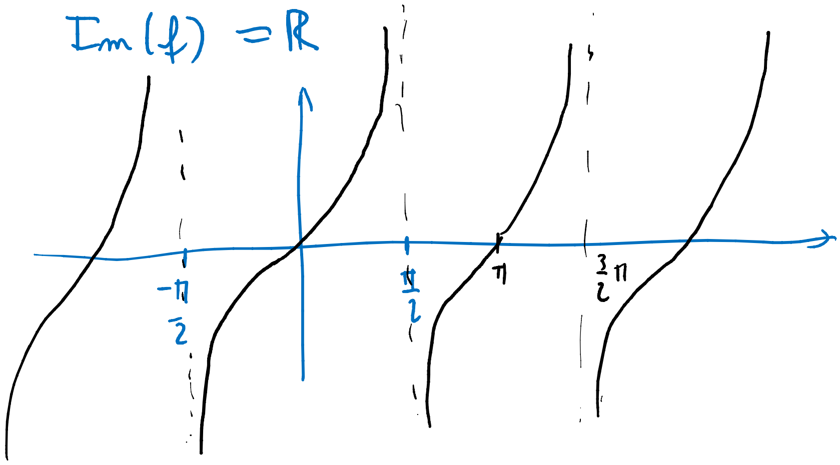
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$f(x) = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$



$\operatorname{tg} x$ è periodica di periodo π