Matematica lezione 5

giovedì 14 ottobre 2021 09:02

Funzioni:

Def: Una FUNZIONE di dominio X e codominio Y è una legge che associa ad ogni elemento di X un elemento (uno solo) di Y.

Notazione:

- Una funzione di dominio X e codominio Y si indica $f : X \longrightarrow Y$
- X si dice DOMINIO di f $(X = Dom(f))$
- Y si dice CODOMINIO di f $(Y = Codom(f))$
- Data $f : X \longrightarrow Y$, $\forall x \in X$, $\exists!\, y \in Y$ che corrisponde ad x. Tale y si indica con $f(x)$ e si dice VALORE di f in x.
- Spesso le funzioni si indicano nel seguente modo:

$$f: \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \quad \text{oppure} \quad f: X \rightarrow Y,\ f(x) = \ldots$$

ESEMPI:

1) $X = \{\text{studenti immatricolati UNIBA}\}$

$Y = \mathbb{N}$

$$f: \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto \text{n. di matricola di } x. \end{array}$$

1) $X = \{a, b, c, d, e\}$ $\quad Y = \{1, 2, 3\}$

$$
\begin{aligned}
f: X &\longrightarrow Y \\
a &\longmapsto 1 \\
b &\longmapsto 3 \\
c &\longmapsto 3 \\
d &\longmapsto 2 \\
e &\longmapsto 1
\end{aligned}
$$

3) $$
\begin{aligned}
f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto x^2
\end{aligned}
$$

Questo vuol dire

$f(1) = 1$

$f(2) = 4$

$f(3) = 9$

$f\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16}$

4) $$
\begin{aligned}
f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{1}{x^2+1} - 17x
\end{aligned}
$$

5) $$
\begin{aligned}
f: \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

<u>**Def**</u>: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Si definisce **IMMAGINE** di f l'insieme:

$$\mathrm{im}(f) = \{ f(x) \mid x \in X \} = \{ y \in Y \mid \exists\, x \in X \text{ t.c. } y = f(x) \}$$

L'immagine di f si indica anche con $f(X)$.

- Più in generale, dato $A \subseteq X$ denotiamo:

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} = \{ y \in Y \mid \exists\, x \in A \text{ t.c. } y = f(x) \}$$

(Tale insieme si dice **IMMAGINE DI A TRAMITE f**)

ESEMPI

1) $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

$$f(\mathbb{R}) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \} = [0, +\infty)$$
$$f([1,2]) = [1,4]$$
$$f([-3,-1]) = [1,9]$$
$$f([-1,4]) = [0,16]$$
$$f((1,10])) = (1,100]$$
$$f((-1,4)) = [0,16)$$

• $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x+1$$

$$f(\mathbb{R}) = im(f) = \mathbb{R}$$
$$f([4,72)) = [5,73)$$
$$f((-3,2)) = (-2,3)$$

DEF: Una funzione $f: X \to Y$ si dice **SURIETTIVA** se $f(X) = Y$.

Def: Una funzione $f: X \to Y$ si dice **INIETTIVA** se:

$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$

$(\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Def: Una funzione si dice **BIETTIVA** se è iniettiva e suriettiva.

OSS Sia $f: X \to Y$.

f è suriettiva $\iff \forall y \in Y \ \exists \ x \in X$ t.c. $f(x) = y$

f è iniettiva $\iff \forall y \in im(f) \ \exists! \ x \in X$ t.c. $f(x) = y$

f è biettiva $\iff \forall y \in Y \ \exists! \ x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x+1$

- Abbiamo detto che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (suriettiva)
- Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $f(x_1) = f(x_2)$ allora:
  $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ (iniettiva)

Quindi f è biettiva.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$

- f non è suriettiva $(f(\mathbb{R}) = [0, +\infty) \neq \mathbb{R})$
- e iniettiva? NO (ad es. $f(3) = 9 = f(-3)$)

3) $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
$x \mapsto x^2$

f è suriettiva. ma non iniettiva
$f(-3) = f(3)$

Nota: Modificando dominio e codominio cambiano le proprietà di una funzione

4) $f: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ è biettiva.
$x \longmapsto x^2$

5) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ non è suriettiva
$x \longmapsto x+1$

- $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}$
- f è iniettiva (come prima)

A noi interessano alcuni tipi particolari di funzioni:

- FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

  Sono le funzioni $f: X \rightarrow Y$ in cui $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

- SUCCESSIONI (reali)

  Sono funzioni $f: X \rightarrow Y$ in cui $Y \subseteq \mathbb{R}$ e $X = \mathbb{N} \setminus A$ con $A \subseteq \mathbb{N}$ finito

ES

$f: \mathbb{N} \setminus \{1, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto \frac{1}{(n-1)(n-3)}$

• FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI REALI:

Prima di dare la definizione ricordiamo alcune

Def: Siano A, B due insiemi, si dice PRODOTTO CARTESIANO di A e B l'insieme

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

ES

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{c, 18\}$$

$$A \times B = \{(1, c), (1, 18), (2, c), (2, 18), (3, c), (3, 18)\}$$

Nel caso in cui $B = A$ scriveremo che

$$A \times A = A^2$$

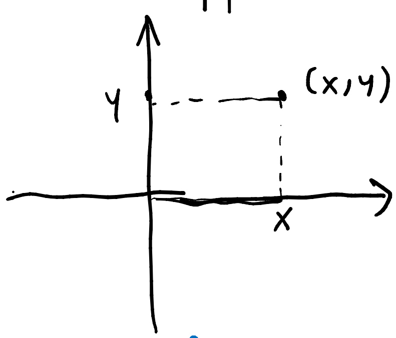
$$A^3 = A^2 \times A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in A\}$$

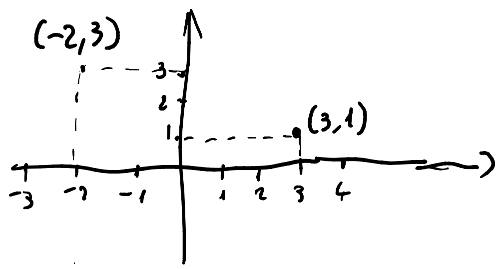
A noi interessano gli insiemi:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}$ si rappresenta come un piano





Def: Una funzione reale di più variabili (reali) è una funzione $f: X \longrightarrow Y$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Funzioni reali di variabile reale

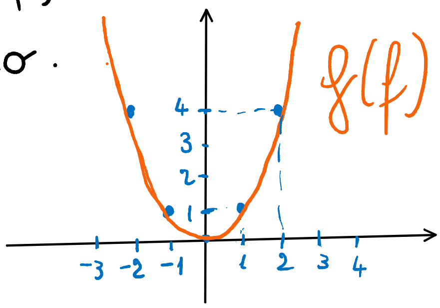
Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Si definisce GRAFICO di f, l'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

(è un sottoinsieme di $X \times Y$)

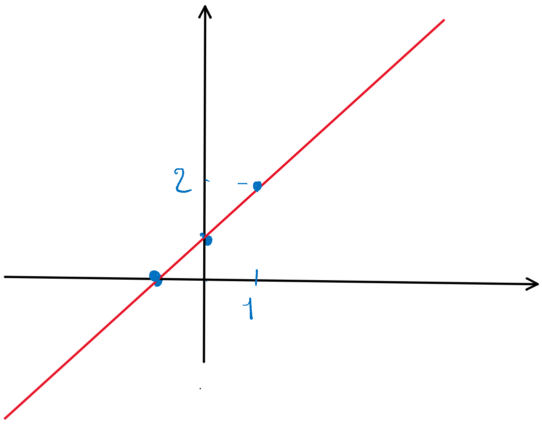
Se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Possiamo rappresentarlo sul piano cartesiano.

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

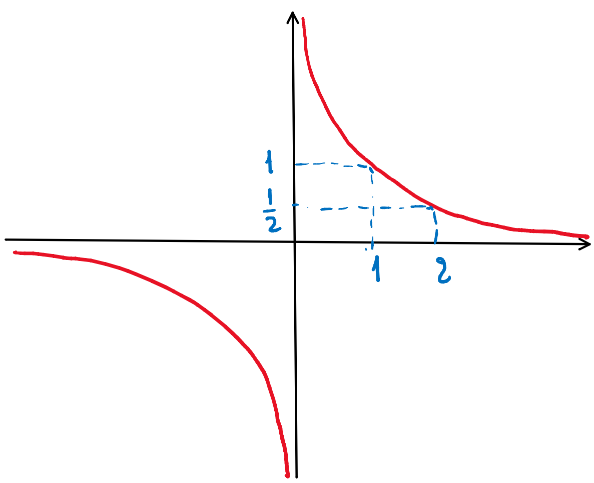


$f(1) = 1$
$f(2) = 4$
$f(-1) = -1$
$\vdots$

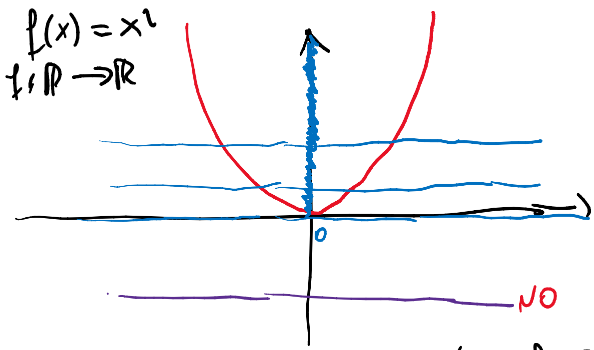
- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x+1$



- $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$

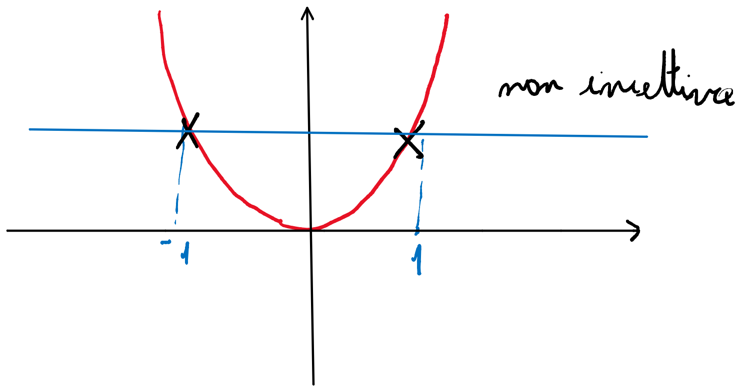


Dal grafico possiamo visualizzare l'immagine di f.
È rappresentata dall'insieme dei punti sull'asse y per cui passa una retta orizzontale che interseca il grafico di f



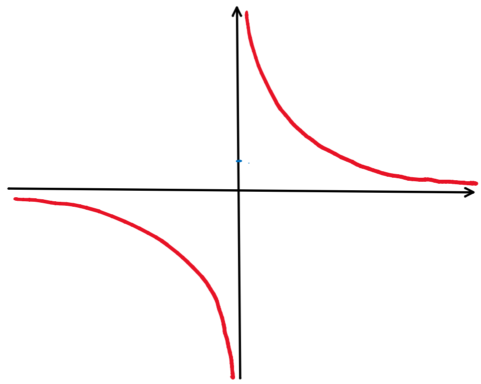
$$im(f) = f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

Il grafico permette di stabilire anche se una funzione è iniettiva. f è iniettiva se tutte le rette orizzontali intersecano il grafico in al più un punto



• $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$\quad x \longmapsto \frac{1}{x}$



$im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f non è suriettiva.

f è iniettiva

Def: Sia $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Sia $A \subseteq X$.

• Si dice che f è MONOTONA CRESCENTE in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

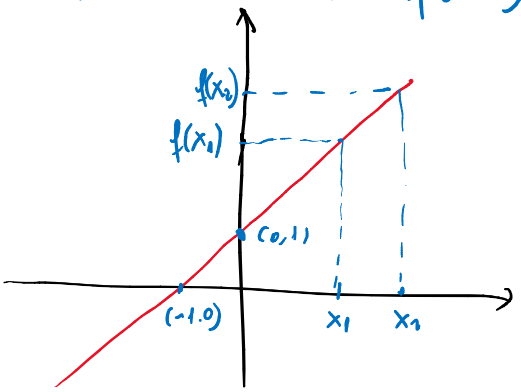
- Si dice che f è MONOTONA DECRESCENTE in A se:
  $\forall\, x_1, x_2 \in A \;:\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
  $\left(f(x_1) \geq f(x_2) \right)$

- Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE in A se:
  $\forall\, x_1, x_2 \in A \;:\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- " " " MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE in A
  se $\forall\, x_1, x_2 \in A \;:\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

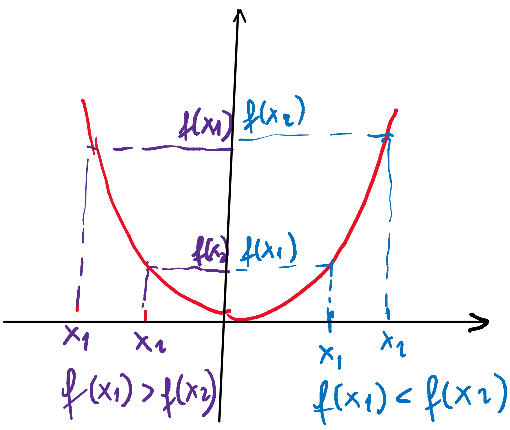
ESEMPI:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x + 1$$



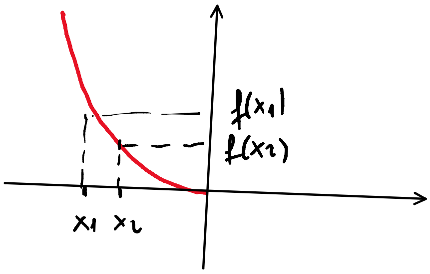
$f(x_2) > f(x_1)$.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$



f non è monotona

- $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$



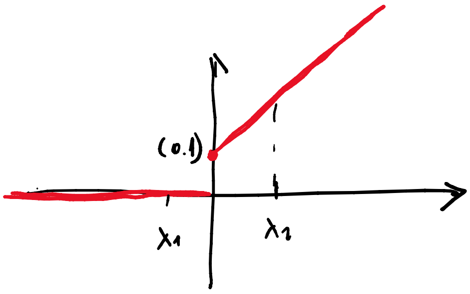
f è monotona strettamente decrescente

- Possiamo dire che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

  è monotona strettamente crescente in $[0, +\infty)$

  è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

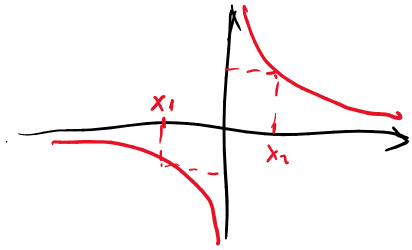


f è monotona crescente (ma non strettamente) in $\mathbb{R}$.

$f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup [1, +\infty)$

- ES

  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

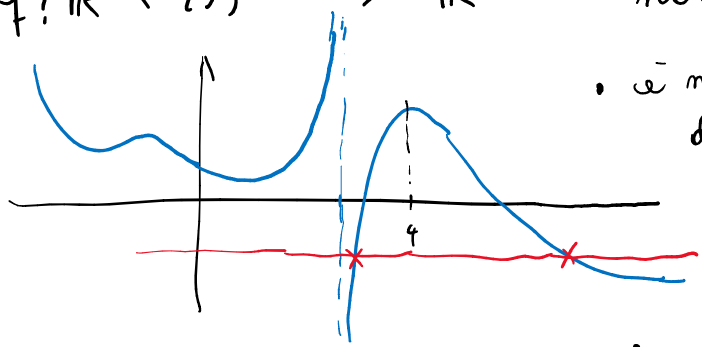


f non è monotona in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

però è monotona strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ o in $(-\infty, 0)$

- ES

  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$



- non è monotona in $\mathbb{R}$
- è monotona strettamente decrescente in $[4, +\infty)$

non è iniettiva.

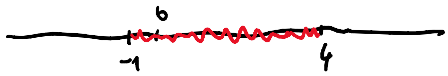
- f è suriettiva

Proprietà di simmetria:

Def: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice simmetrico rispetto a 0 se: $x \in A \Rightarrow -x \in A$.

$(-2, 2)$ è simmetrico

$(-1, 4)$ non è simmetrico



$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è simmetrico

$(-3,-2) \cup (2,3)$ è simmetrico

A simmetrico

• **Def:** Sia $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e sia $A \subseteq X$.

. Si dice che f è PARI in A se $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in A$.

. Si dice che f è DISPARI in A se $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in A$.

(Se A non viene specificato si intende $A = X$).

ES

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ è pari

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ è dispari:

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

f è pari se n è pari

f è dispari se n è dispari.

4) $$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

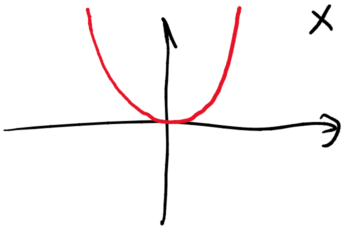
$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$ è dispari

5) $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x+1$$

non è pari
non è dispari

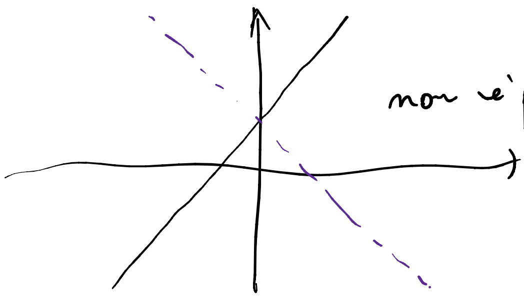
$$f(-1) = 0$$
$$f(1) = 2$$

Graficamente:
Una funzione è pari se e solo se ribaltando il suo grafico rispetto all'asse y il grafico non cambia



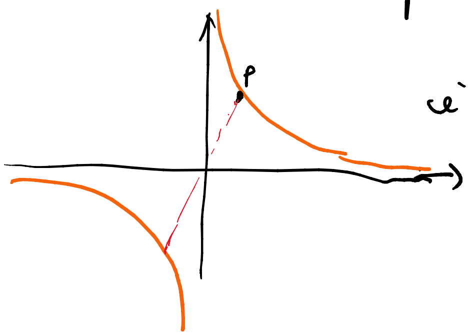
x^2

è pari

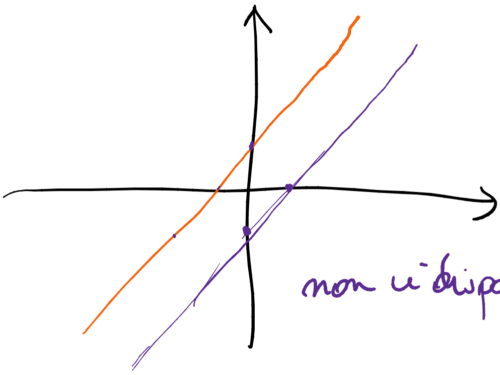


non è pari

• Una funzione è dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto a $(0, 0)$



è dispari



non è dispari

Def:

- Sia $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che

1) f è SUPERIORMENTE LIMITATA in un insieme $A \subseteq X$ se $f(A)$ è un insieme superiormente limitato

2) f è INFERIORMENE LIMITATA in $A \subseteq X$ se se $f(A)$ è inferiormente limitato

3) f è LIMITATA in A se f è superiormente limitato e inferiormente limitata.

4) Si definisce ESTREMO SUPERIORE di f in A la quantità $\sup_A f := \sup f(A)$.

ESEMPI

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2$$

è limitata superiormente / inferiormente (in $\mathbb{R}$)?

$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

quindi f è inf. limitato in $\mathbb{R}$ ma non superiormente limitata.

$$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$$
$$\inf_{\mathbb{R}} f = 0$$

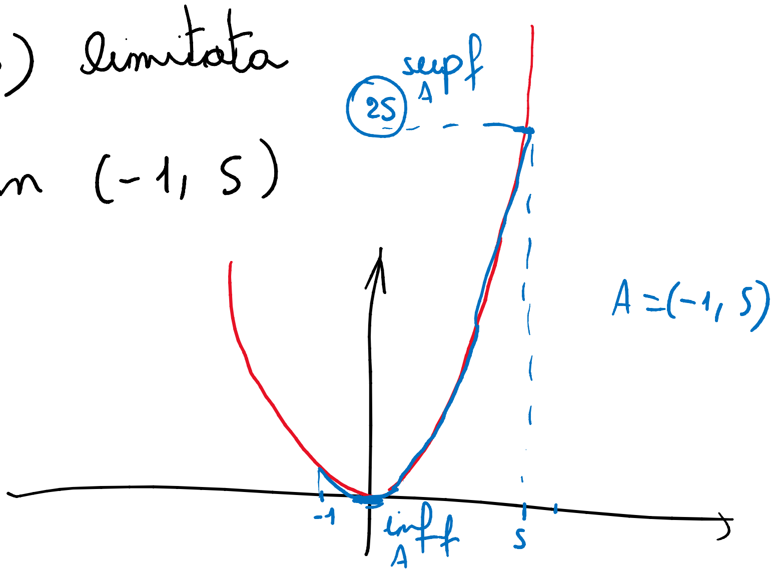
• f è inf/sup limitata in $(-1, 5)$?

$f((-1,5)) = [0, 25)$ limitata

f è limitata in $(-1, 5)$

$\sup\limits_{(-1,5)} f = 25$

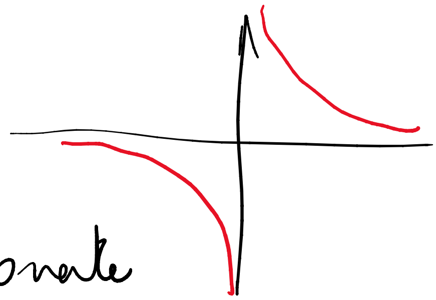
$\inf\limits_{(-1,5)} f = 0$



• $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

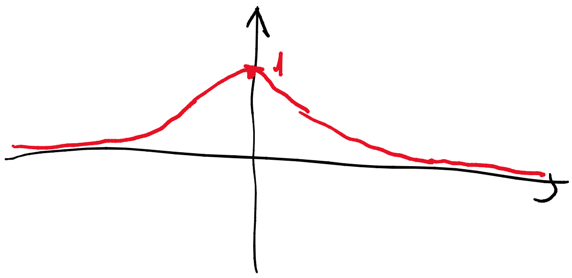
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

non è limitata né superiormente né inferiormente



• $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{1}{x^2+1}$



f è limitata

$\sup f = 1$

$\inf f = 0$