Lezione 42

giovedì 13 gennaio 2022 09:03

Def Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $x \in \mathrm{Int}(X)$ e $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Se la funzione $\varphi_{x,v}(t) = f(x + tv)$ è derivabile in $t = 0$, si definisce **DERIVATA DIREZIONALE** di f lungo la direzione v nel punto x, la quantità:

$$D_v f(x) = \varphi'_{x,v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_{x,v}(t) - \varphi_{x,v}(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Consideriamo le direzioni:

$e_1 = (1, 0, \dots \dots 0)$

$e_2 = (0, 1, 0 \dots \dots 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

In $\mathbb{R}^2$:

$e_1 = (1, 0)$

$e_2 = (0, 1)$

In $\mathbb{R}^3$:

$e_1 = (1, 0, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1)$

(spesso indicati con $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)

Def: La derivata direzionale di f rispetto alla direzione e_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ si dice **DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO ALLA VARIABILE x_i**.

Si può indicare con:

$D_{e_i} f$, $D_{x_i} f$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, f_{x_i} , $\partial_{x_i} f$.

OSS

$$f_{x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t}$$

La derivata parziale si calcola con le usuali regole, derivando rispetto a x_i e tenendo fissate le altre variabili

ESEMPIO

$$f(x, y) = y + x^2$$

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = 1$$

ESEMPIO 2

$$f(x, y) = x^2 y + 2x\cos(y)$$

$$f_x(x, y) = 2xy + 2\cos y$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x(-\sin y) = x^2 - 2x\sin(y)$$

ESEMPIO 3

$$f(x, y) = \sin(xy^2)$$

$$f_x(x, y) = \cos(xy^2)\, y^2$$

$$f_y(x, y) = \cos(xy^2)\, 2xy = 2xy\cos(xy^2).$$

ESEMPIO 4

$$f(x,y) = x y e^{x^2+3y^2}$$

$$f_x(x,y) = y\left(1\cdot e^{x^2+3y^2} + x e^{x^2+3y^2}\cdot 2x\right)$$
$$= y e^{x^2+3y^2}\left(1+2x^2\right)$$

$$f_y(x,y) = x\left(1\cdot e^{x^2+3y^2} + y e^{x^2+3y^2}\, 6y\right)$$
$$= x e^{x^2+3y^2}\left(1+6y^2\right).$$

Def: Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathrm{Int}(X)$.
Si dice che f è **DERIVABILE** in x se $\exists$ tutte le derivate parziali di f in x.
In tal caso si definisce **GRADIENTE** di f il vettore le cui componenti sono le derivate parziali di f in x:

$$\nabla f(x) := \left(f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

OSS

Se $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è derivabile in tutti i punti di X, allora

$f_{x_i}: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (è una funzione reale di n variabili)

Mentre $\nabla f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (è un campo vettoriale)

ESEMPIO

$$f(x,y) = (2x-y)^2$$

$$f_x(x,y) = 2(2x-y)\cdot 2 = 4(2x-y) = 8x - 4y$$

$$f_y(x,y) = 2(2x-y)(-1) = -2(2x-y) = 2y-4x$$

$$\nabla f(x,y) = (8x-4y,\ 2y-4x)$$

Def: Una funzione si dice di classe C^1 in un insieme X se è derivabile in X e se le derivate parziali di f sono continue in X. (richiediamo per semplicità che X sia aperto).

Attenzione!
La derivabilità è una proprietà debole se $\underline{n \geq 2}$.
Ad esempio, non è vero che una funzione derivabile è continua in X.

Def Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathrm{Int}(X)$.
Si dice che f è DIFFERENZIABILE in x se f è derivabile nel punto x e se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \nabla f(x) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

Nota Se $n = 1$ (cioè per funzioni di una variabile)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0.$$

TEOREMA (PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DIFFERENZIABILI)

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathrm{Int}(X)$.
Se f è differenziabile in x, allora:

1) f è continua in x.
2) f è derivabile in x
3) Esistono tutte le derivate direzionali di f in x.
   Inoltre $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ si ha la
   $D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$.

TEOREMA (DEL DIFFERENZIALE TOTALE)
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se f è di classe C^1 in X allora è differenziabile in X.

Massimi e minimi di funzioni di più variabili

Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, allora $f(X) \subseteq \mathbb{R}$.
Sappiamo quindi definire $\inf f(X)$ e $\sup f(X)$ ($\min f(X)$ e $\max f(X)$ se $f(X)$ ha massimo e minimo).
Queste quantità si indicano anche con:

$$\sup_{x \in X} f(x) \quad e \quad \inf_{x \in X} f(x) \qquad \left(\max_{x \in X} f(X) \quad e \quad \min_{x \in X} f(x) \right)$$

Def Un punto $x_0 \in X$ si dice un **PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO** per f in X se
$f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x)$. Equivalentemente:
$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X$.
In tal caso, si scrive anche $f(x_0) = \max_{x \in X} f(x)$.

Def Un punto $x_0 \in X$ si dice un **PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO** per f in X, se $f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)$. Equivalentemente:
$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$.
In tal caso, si scrive anche $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$.

Def Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, si dice che $x_0 \in X$ è un **PUNTO DI MASSIMO LOCALE** per f in X se $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che
$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X \cap U$.

Def Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, si dice che $x_0 \in X$ è un **PUNTO DI MINIMO LOCALE** per f in X se $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che
$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap U$.

TEOREMA DI FERMAT (PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI)
Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathrm{Int}(X)$ un punto di massimo o minimo locale per f in X. Se f è derivabile in x_0 allora
$Df(x_0) = (0, \ldots, 0)$.

Def Un punto in cui f è derivabile e Df è nullo si dice **PUNTO CRITICO** per f.

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, X aperto, e sia $x \in X$.
Se f è derivabile in tutti i punti di X e le derivate parziali di f sono derivabili nel punto x, possiamo definire le derivate seconde:

$\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$: $(f_{x_i})_{x_j}$

Questa funzione si indica anche con:

$f_{x_i x_j}$, $D_{x_i x_j} f$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\partial^2_{x_i x_j} f$

TEORMA DI SCHWARZ

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^2 in X allora $f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x)$ $\forall\, i, j = \{1, \dots, N\}$ e $\forall\, x \in X$

ESEMPIO

$$f(x, y) = x^2 y$$

$f_x(x,y) = 2xy$, $f_y(x,y) = x^2$

$f_{xx}(x,y) = 2y$ $\qquad$ $f_{xy}(x,y) = 2x$

$f_{yx}(x,y) = 2x$ $\qquad$ $f_{yy}(x,y) = 0$

- Solitamente le derivate seconde (che sono n^2) si scrivono in una tabella racchiusa tra parentesi.

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Nell'esempio precedente:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Def $H_f(x)$ è detta MATRICE HESSIANA di f nel punto x.

Matrici:

Def: Una MATRICE $m \times n$ è una tabella di numeri con m righe e n colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ESEMPI

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ è una matrice 2×3

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è una matrice 2×2.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ è una matrice 3×2

Operazioni tra matrici

• **Addizione**:

Due matrici con le stesse dimensioni si possono sommare elemento per elemento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

• **Moltiplicazione per uno scalare**

Moltiplicare una matrice per un numero λ significa moltiplicare tutti i suoi elementi per λ.

$\lambda = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

• **Prodotto di matrici**

Se A e B sono due matrici e il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B allora si può fare il prodotto riga per colonna

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{pmatrix}$$

- Determinante di una matrice 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = ad - bc$$ (DETERMINANTE DI A)

- Polinomio caratteristico di una matrice 2x2.

è il polinomio

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$ POLINOMIO CARATTERISTICO DI A

Le radici del polinomio caratteristico si dicono AUTOVALORI DI A.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda) - 1$$
$$= -2\lambda + \lambda^2 - 1$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

Gli autovalori di A sono

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

- Il determinante si può calcolare per tutte le matrici quadrate.

Per una matrice 3 x 3 si calcola usando la

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

REGOLA DI SARRUS :

$$
\begin{array}{cccccc}
+ & + & + & - & - & - \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right)
\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}
$$

$$
A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}
$$

$$
\det A = 1\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot(-1)\cdot 0 + 0\cdot 3\cdot 4 - \left(4\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot 2\right) = 0 + 4 = 4.
$$

Come prima, il polinomio caratteristico è il determinante della matrice ottenuto togliendo λ agli elementi sulla "diagonale principale".

TEOREMA

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, X aperto. Sia $x \in X$ un punto critico di f e che f sia di classe C^2 in X. Allora:

1) $H_f(x)$ ha solo autovalori reali.
2) Se tutti gli autovalori di $H_f(x)$ sono positivi (strettamente) allora x è un punto di minimo locale
3) Se tutti gli autovalori di $H_f(x)$ sono negativi allora x è un punto di massimo locale
4) Se $H_f(x)$ ha un autovalore positivo e uno negativo allora x non è un punto

di max locale né di minimo locale.

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 - x^4 + y^2 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

cerchiamo i punti di max e di min locale.

1) Cerchiamo i punti critici:

$f_x(x,y) = 2x - 4x^3$

$f_y(x,y) = 2y$

$$\begin{cases} 2x - 4x^3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1-2x^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \lor x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Tre punti critici:

$P_1 = (0,0)$, $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

2) Calcoliamo $H_f(x,y)$ e vediamo se questi punti sono di max o di min locale.

$f_x(x,y) = 2x - 4x^3$, $f_y(x,y) = 2y$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana nei punti critici

- $P_1 = (0,0)$

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{H_f(P_1)}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

2 è l'unico autovalore ed è >0 quindi $(0,0)$ è un punto di min locale.

- $H_f(P_2) = H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 2-12\cdot\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

gli autovalori sono -4 e 2.

Possiamo concludere che P_2 e P_3 non sono punti di max né di minimo locale.

Formula di Taylor

- di ordine 1:

Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 in X e $x_0 \in \text{Int}(X)$, allora:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

per $x \rightarrow x_0$.

- di ordine 2:

Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 in X, X aperto, e $x_0 \in X$, allora:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0)(x-x_0) \cdot (x-x_0) + o(\|x-x_0\|^2)$$

scritto in colonna

per $x \rightarrow x_0$.