Lezione 39

lunedì 10 gennaio 2022 09:08

Serie numeriche

$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ dove $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$ è una successione e $n_0, K_0 \in \mathbb{N}$ con $K_0 \geq n_0$.

Abbiamo visto che

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=k_0}^{n} a_k \quad = s_n$$

$\{s_n\}_{n \geq k_0}$ si dice successione delle somme parziali di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con indice iniziale K_0.

Carattere di una serie:

- CONVERGENTE: $\lim_{n \to +\infty} s_n$ esiste finito
- DIVERGENTE A $+\infty$: $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$
- DIVERGENTE A $-\infty$: $\quad$ " $\quad = -\infty$
- IRREGOLARE: se $\nexists \lim_{n \to +\infty} s_n$.

Nota Il carattere di una serie non dipende dall'indice iniziale K_0.

Serie speciali:

1) SERIE GEOMETRICA (di ragione $x \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Carattere:

- è convergente se $|x| < 1$ (cioè $-1 < x < 1$). Inoltre $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- è divergente a $+\infty$ se $x \geq 1$
- è irregolare se $x \leq -1$.

2) SERIE ARMONICA GENERALIZZATA (di esponente $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Carattere:

- convergente se $\alpha > 1$
- divergente se $\alpha \leq 1$.

3) SERIE TELESCOPICHE

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \qquad \text{dove} \qquad a_n = b_n - b_{n+1}$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=k_0}^{n} a_k = \lim_{n \to +\infty} b_{k_0} - b_{n+1}$$

Condizione necessaria per la convergenza

Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Criteri di convergenza per serie a termini (definitivamente) non negativi

1) criterio della radice n-sima

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ allora

- $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è conv.
- $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è div.
- $l = 1$ BOH!

2) Criterio del rapporto: Se $a_n > 0$ definitivamente e

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora

- $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è conv.
- $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è div.
- $l = 1$ BOH!

3) Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini non negativi

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

1) Se $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ è convergente, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.

2) Se $\sum_{n=n_0} a_n$ è divergente, allora $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ è divergente.

- Criterio del confronto asintotico:

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ due serie a termini (definitivamente) positivi.

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0,+\infty)$, allora le due serie hanno lo stesso carattere. $\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \iff a_n \sim l\, b_n\right]$

ESEMPIO

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

La serie è a termini positivi: $\frac{1}{1+n^2} > 0$

$$\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{n^2\underbrace{\left(\frac{1}{n^2}+1\right)}_{\to 1 \text{ per } n\to+\infty}} \sim \frac{1}{n^2} \quad \left[\text{Cioè } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n^2}\Big/\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1\right]$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente perché è una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.
Quindi la serie di partenza è convergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n+\log n}$$

La serie è a termini positivi. Inoltre

$$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+\log n} = \frac{\sqrt{n}\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\to 1 \text{ per } n\to+\infty}}{n\underbrace{\left(2+\frac{\log n}{n}\right)}_{\to 2 \text{ per } n\to+\infty}} \sim \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

che è divergente perché è una serie armonica generalizzata di esponente $\frac{1}{2} \leq 1$.

La serie di partenza è divergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^{10}}{1+2n+3^n+\log^2 n} = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}-1}{1+2n+3^n+\log^2 n}}$$

La seconda serie è a termini positivi (per $n \geq 2$).

$$a_n = \frac{n^{10}\left(1-\frac{1}{n^{10}}\right)}{3^n\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2n}{3^n}+1+\frac{\log^2 n}{3^n}\right)} \sim \frac{n^{10}}{3^n} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n} = b_n$

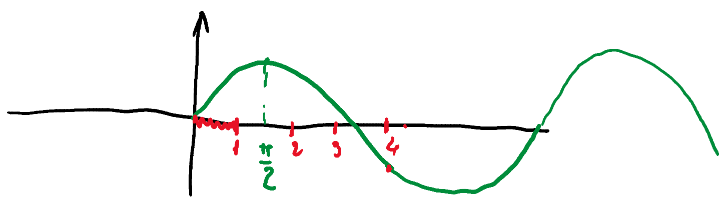
Criterio del rapporto:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{10}}{3^{n+1}} \Big/ \frac{n^{10}}{3^n} = \frac{(n+1)^{10}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^{10}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1}{3} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{3} < 1.$$

Quindi per il criterio del rapporto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n}$ è convergente e dunque anche la serie di partenza è conv.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$



Attenzione:

$\sin\frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

mentre $\sin n$ cambia segno infinite volte

La serie è a termini positivi:

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim$?

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

  $= x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)$

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\Bigg(1 + \underbrace{\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\to 0}\Bigg) \sim \frac{1}{n}$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che è divergente (serie armonica)

OSS

Attenzione alle forme indeterminate!

$(n+1)^{n^2}$ non è equivalente a n^{n^2} infatti:

$$(n+1)^{n^2} = n^{n^2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{}$$ f.i.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to \text{"}e^{+\infty}\text{"} = +\infty.$$

Cosa succede se $l = 0$ o $l = +\infty$?

- Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1$ definitivamente.

  $\xRightarrow{(\text{se } b_n > 0)}$ $a_n \leq b_n$.

  ci si riconduce al criterio del confronto.

- Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \Rightarrow a_n \geq b_n$ definitivamente.

TEOREMA (CONFRONTO ASINTOTICO IN FORMA DEBOLE)

- Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini (def.) positivi.

- Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, allora

  1) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è convergente $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente
  2) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è divergente $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è divergente.

- Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, allora

  1) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente
  2) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è divergente $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è divergente.

Criteri per serie di segno arbitrario

- **Criterio della convergenza assoluta**

Def: Una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

TEOREMA

Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora è anche convergente. Inoltre si ha $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

La serie non è a termini positivi.
Provo a studiare l'assoluta convergenza.

Dobbiamo studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$$

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente (serie armonica generalizzata di esponente > 1).
per il criterio del confronto
la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ è convergente.

Per il criterio della convergenza assoluta, anche
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge.

Attenzione

Se avessimo avuto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ non avremmo potuto applicare lo stesso metodo.
Si può dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n} \right|$ è divergente.

Criterio di Leibniz

Def Una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ si dice SERIE A SEGNI ALERNI se
$a_n = (-1)^n b_n$ dove $b_n \geq 0 \quad \forall n$.
(Se $b_n \geq 0$ definitivamente si dice che la serie è DEFINITIVAMENTE A SEGNI ALTERNI).

TEOREMA (CRITERIO DI LEIBNIZ)
Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie, con $a_n = (-1)^n b_n$. Se:

1) $b_n \geq 0$ definitivamente (la serie è def. a segni alterni)
2) $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$.

3) b_n è una successione definitivamente decrescente ($b_{n+1} \leq b_n$ definitivamente).

Allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

è una serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ dove $b_n = \frac{1}{n}$

1) $\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \geq 1$

2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

3) $\frac{1}{n}$ è decrescente

$$\left(n \leq n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \right)$$

Per il criterio di Leibniz la serie è convergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n + 1}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\log n + 1} = (-1)^n b_n \quad \text{dove } b_n = \frac{1}{\log n + 1}.$$

Si ha che

1) $b_n = \frac{1}{\log n + 1} > 0 \quad \forall n \geq 1$

2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\log n + 1} = 0.$

3) b_n è decrescente.

Per dimostrarlo possiamo dire che $b_n = f(n)$ dove $f(x) = \frac{1}{\log x + 1}$

OSS

Se $\exists M > 0$ t.c. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq M$ allora f è decrescente in $[M, +\infty)$ e b_n è definitivamente decrescente.

$$f(x) = \frac{1}{\log x + 1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(\log x+1)^2}\left(\log x+1\right)' = -\underbrace{\frac{1}{(\log x+1)^2}}_{>0}\frac{1}{x} \leq 0$$

$\forall\, x > 0.$

Dunque f è decrescente in $(0,+\infty)$ e b_n è decrescente.

—

In conclusione la serie converge per il criterio di Leibniz.

OSS

Ogni numero reale è una serie.

$x = n, d_1 d_2, \ldots$

dove $n \in \mathbb{Z}$ e $\{d_m\}_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\geq 1}} \subseteq \{0,1,2,\ldots,9\}$.

$$x = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}$$

—

$e^x = T_n(x) + R_n(x)$ dove $T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.

Avevamo visto che $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall\, x.$

$$\lim_{n\to+\infty} e^x = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) + R_n(x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \implies e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

(serie di Taylor)