Lezione 38

giovedì 23 dicembre 2021 12:14

Serie geometrica (di ragione x)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} x^n$$

- Se $x = 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ che è divergente a $+\infty$. (già visto)

- Se $x \neq 1$

$$(1-x)\, s_m = \sum_{n=0}^{m} x^n (1-x) = \sum_{n=0}^{m} x^n - x^{n+1}$$

$$= x^0 - x^{m+1} = 1 - x^{m+1}$$

$$s_m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{x^{m+1}-1}{x-1} \qquad (\text{se } x \neq 1)$$

$$\lim_{m \to +\infty} s_m = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

$\sum_{m=0}^{\infty} x^m$ è

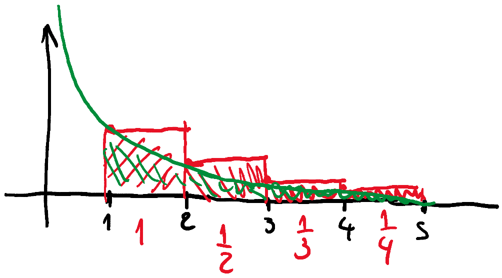
- convergente se $-1 < x < 1$ ($|x| < 1$) e $\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$
- divergente a $+\infty$ se $x \geq 1$
- è irregolare se $x \leq -1$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$
- $0,\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 3\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 3\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$$

Serie armonica

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ o $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ è divergente



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è la somma delle aree di questi rettangoli.

$$\int_1^{m+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_m^{m+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{n=1}^{m} \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\cdot 1 = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{k}$$

Allora $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq \int_1^{m+1} \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_1^{m+1} = \log(m+1) \xrightarrow{m\to+\infty} +\infty$

Allora $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = +\infty$ cioè $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Serie armonica generalizzata di esponente α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

Si può far vedere che la serie è: convergente se $\alpha > 1$
divergente se $\alpha \leq 1$.

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA)

Se una serie $\sum_{n=n_0} a_n$ è convergente, allora $\lim_{m\to+\infty} a_m = 0$.

Attenzione!

$\lim_{m\to+\infty} a_m = 0 \overset{\not\Rightarrow}{\underset{NO}{}} \sum_{m=k_0}^{\infty} a_m$ è convergente

ad esempio $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ è divergente ma $\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} = 0$.

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$. $\lim_{n\to+\infty} \sin n \ \nexists$

Rosso dice che la serie non è convergente.

Serie a termini non negativi

Def Una serie $\sum_{n=k_0}^{\infty} a_n$ si dice a TERMINI NON NEGATIVI se $a_n \geq 0$ $\forall n \geq k_0$.

Def Una serie $\sum_{n=k_0}^{\infty} a_n$ si dice a TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI se $a_n \geq 0$ definitivamente per $n \to +\infty$.

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-17}{n^2+1}$ è a termini definitivamente non negativi (anche positivi).

OSS

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è a termini (definitivamente) non negativi allora S_n soddisfa:

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n \quad \Rightarrow \quad S_{n+1} \geq S_n \ \forall n \ \left(\underset{\text{per } n\to+\infty}{\text{definitivamente}}\right)$$

cioè S_n è una successione monotona crescente.

Per il teorema di esistenza del limite di funzioni monotone si ha che $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

CONSEGUENZA

Le serie a termini (definitivamente) non negative possono essere solo convergenti o divergenti a $+\infty$.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ la serie non è convergente.

Inoltre la serie è a termini non negativi.

quindi la serie è divergente a $+\infty$.

Criterio della radice n-esima

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini (definitivamente) non negativi. Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Allora:

1) Se $\ell < 1$ la serie è convergente
2) Se $\ell > 1$ la serie è divergente.

(Non si può dire nulla se $\ell = 1$).

Idea:

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$\iff \sqrt[n]{a_n} = \ell + o(1)$

$\iff a_n = (\ell + o(1))^n$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$$

La serie è a termini positivi

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2} < 1$$

Per il criterio della radice n-esima la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ è convergente.

Criterio del rapporto:

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini (definitivamente) positivi tale che

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ Allora

1) Se $l < 1$ la serie è convergente (*)

2) Se $l > 1$ la serie è divergente

(Non si può concludere nulla se $l = 1$).

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

è a termini positivi

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \, \frac{n!}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \, \cancel{n!}}{(n+1)\, \cancel{n!} \, \cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

$0 < 1$ quindi per il criterio del rapporto la serie è divergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$ è a termini positivi.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty \neq 0$$ non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

La serie non è convergente e, siccome è a termini non negativi, è divergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

è a termini positivi.

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \Big/ \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \, \frac{(2n)!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)}}{2\cancel{(n+1)}(2n+1)\, n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} e \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 < 1$$

la serie è convergente.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (esercizio)

Criterio del confronto per serie

Siano $\{a_n\}_{n\geq n_0}$, $\{b_n\}_{n\geq n_0}$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall\, n \geq n_0$ (oppure definitivamente per $n \to +\infty$). Allora:

1) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è convergente, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.

2) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è divergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$$

la serie è a termini positivi.

$$\frac{1}{\log(n+1)} \Big/ \frac{1}{\log n} = \frac{\log n}{\log(n+1)} = \frac{\log n}{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\cancel{\log n}}{\cancel{\log n}\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

Il criterio del rapporto non ci permette di concludere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$$

$\log n \leq n$ definitivamente.

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log n}$ definitivamente.

Allora, siccome $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente (è la serie armonica) posso concludere che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ è divergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

è a termini positivi.

$\sqrt{n} \geq 2 \log n$ definitivamente per $n \to +\infty$.

$= \log n^2$

$-\sqrt{n} \leq -\log n^2 = \log \frac{1}{n^2}$

$e^{-\sqrt{n}} \leq e^{\log \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^2}$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente perché è una serie armonica generalizzata con esponente $2 > 1$.

posso concludere con il criterio del confronto.

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ è convergente.

Ricordiamo

Due successioni $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ si dicono ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ($a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$)

Se $\frac{a_n}{b_n} \to l \in (0, +\infty)$.

Posso dire che $\frac{a_n}{l\, b_n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$ cioè $a_n \sim l\, b_n$.

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini (definitivamente) positivi. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0,+\infty)$ allora le serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$$

$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 1}} \sim \frac{1}{n^2}$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente perché è una serie armonica generalizzata di esponente $2>1$.