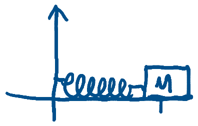
Lezione 37

mercoledì 22 dicembre 2021 09:03

Riepilogo sulle EDO:

- equazioni integrali $y^{(n)} = f(x)$
- equazioni lineari di I ordine $y' = a(x)\,y + g(x)$.
- equazioni a variabili separabili $y' = g(x)\,h(y)$.
- equazioni lineari di II ordine a coeff. costanti
  $a y'' + b y' + c y = g(x)$.

Spesso in fisica la funzione incognita si denota con x e la variabile da cui dipende con t.



x_0 posizione di riposo

$m x'' = -K(x - x_0)$ $\quad$ K costante elastica

$m x'' + K x = K x_0$ $\quad$ equazione lineare di II ordine.

- $a y'' + b y' + c y = 0$
  polinomio caratteristico: $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$
  Se λ è una radice allora $e^{\lambda x}$ è una soluzione.

- $y' = a y$ $\quad$ a costante
  Sappiamo che la soluzione generale è $y(x) = K e^{ax}$
  $y' - a y = 0$
  Polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda - a$
  $\lambda = a$ è l'unica radice e $c e^{ax}$ è una soluzione.

Lo stesso metodo si può usare per equazioni lineari di ordine più alto a coeff costanti:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Polinomio caratteristico $p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$.

- Se λ è una radice, allora $e^{\lambda x}$ è una soluzione.
- Se λ è una radice di molteplicità m allora $e^{\lambda x}, e^{\lambda x} x, \dots, e^{\lambda x} x^{m-1}$ sono soluzioni.
- Se λ è una radice complessa di molteplicità m allora $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad x e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad x e^{\alpha x}\sin(\beta x) \dots$$
$$\dots \quad e^{\alpha x}\cos(\beta x) x^{m-1}, \quad e^{\alpha x}\sin(\beta x) x^{m-1}.$$

Combinando queste soluzioni che corrispondono alle radici si ottiene la soluzione generale.

ESEMPIO

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

Polinomio caratteristico $\lambda^3 - 3\lambda + 2$

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

1 è una radice

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

quindi $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2)$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

La soluzione generale dell'equazione:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x x + C_3 e^{-2x}.$$

Ci sono equazioni diverse da quelle che abbiamo visto

$$\begin{cases} y'' = 2e^{y'} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si può risolvere l'equazione con una sostituzione:

Se $z = y'$, allora z risolve

Se $z = y'$, allora z risolve

$$\begin{cases} z' = 2e^z \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{z'}{e^z} = 2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{e^z}\,dz = \int 2\,dx = 2x + C_1$$

$$\int \frac{1}{e^z}\,dz = \int e^{-z}\,dz = -e^{-z} + C_2$$

Quindi $-e^{-z} = 2x + C$

$$z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -e^0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

$$-e^{-z} = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-z} = 1 - 2x$$

$$\Rightarrow \quad -z = \log(1-2x) \quad \Rightarrow \quad z(x) = -\log(1-2x)$$

Adesso ricordiamo che $z = y'$

$$y'(x) = -\log(1-2x)$$

$$y(x) = -\int \log(1-2x)\,dx \qquad t = 1-2x \quad , dt = -2\,dx \quad , dx = -\tfrac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \log t\,dt = \frac{1}{2}\,t(\log t - 1) + C$$

$$= \frac{1-2x}{2}\left(\log(1-2x) - 1\right) + C$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}(-1) + C \quad \Leftrightarrow \quad 1 = -\frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}$$

La soluzione è

$$y(x) = \frac{1-2x}{2}\left(\log(1-2x) - 1\right) + \frac{3}{2}.$$

SERIE NUMERICHE

Una serie è una "somma" di infiniti termini di una successione.

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 0,33333\ldots\ldots$$

$$= 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$$

Ho la successione $\{a_k\}_k$ dove $a_k = \frac{3}{10^k}$ e sto sommando tutti i termini di a_k a partire da $k=1$.

Ricordiamo che una successione $\{a_n\}_n$ è una funzione

$$a : \mathbb{N}\setminus A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto a_n$$

dove A è un insieme finito.

- $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ $\quad \left(a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \dots\dots \right)$

- $a_n = \frac{3}{10^n}$ $\quad \left(a_0 = 3,\ a_1 = \frac{3}{10},\ a_2 = \frac{3}{100} \ \dots\dots \right)$

Si possono fare limiti di successioni solo per $n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{1+n-2n^3} = -\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^1 = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

cioè $\frac{\log(1+x)}{x} = 1 + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

- $$\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$n \sin\left(\frac{1}{2n}\right) = n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2}$$

quindi $\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

- $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \ \nexists$.

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \qquad \forall \alpha\in\mathbb{R}$.

- $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

Per le successioni abbiamo una gerarchia di infiniti:

$\log n$, $\underset{\text{con } \alpha>0}{n^\alpha}$, $\underset{\text{con } \alpha>1}{\alpha^n}$, $n!$, n^n.

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$. $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

- $\lim_{n\to+\infty} n^n - n! = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^n}_{+\infty}\Big(1 - \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\downarrow 0}\Big) = +\infty$.

Def: Sia $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ una successione e sia $k_0\in\mathbb{N}$, $k_0\geq n_0$.

Definiamo SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI DI TERMINI a_n E INDICE INIZIALE k_0 la successione $\{s_n\}_{n\geq k_0}$ definita da:

$$s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k = a_{k_0} + a_{k_0+1} + \dots + a_n$$

ESEMPIO

$a_k = \frac{1}{10^k}$, $k\geq 0$

$s_0 = a_0 = 1$

$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1{,}1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 1{,}11$

$\vdots$

$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1{,}\underbrace{1\dots1}_{n \text{ volte}}$.

ESEMPIO

$\{a_n\}_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{n}$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$s_1 = a_1 = 1$

$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\vdots$

OSS

Se $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$, allora:

- $s_{k_0} = a_{k_0}$
- $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

Def Sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione e sia $k_0 \geq n_0$.
Definiamo SERIE di termini a_n e indice iniziale k_0
$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \to +\infty} s_n$ dove $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$.

- Si dice che la serie $\sum_{n=k_0}^{\infty} a_n$ è CONVERGENTE se il limite $\lim_{n \to +\infty} s_n$ esiste ed è finito.
- Si dice che $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ è DIVERGENTE A $+\infty$ se $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$.
- " " " " " " A $-\infty$ se $\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$
- Si dice che $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ è IRREGOLARE se il limite non esiste.

ESEMPIO

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1$$

In questo caso $a_k = 1 \quad \forall\ k \geq 1$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$\sum_{k=1}^{\infty} 1$ è divergente a $+\infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$ SERIE DI MENGOLI

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

In generale

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

La serie è convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Serie telescopiche

Def Una SERIE TELESCOPICA è una serie del tipo $\sum_{k=k_0} a_k$ dove a_k è della forma $a_k = b_k - b_{k+1}$ per qualche successione $\{b_k\}_{k\geq k_0}$.

Nell'esempio precedente $b_k = \frac{1}{k}$ e $a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Per la serie telescopica

$s_{n_0} = a_{n_0} = b_{n_0} - b_{n_0+1}$

$s_{n_0+1} = s_{n_0} + a_{n_0+1} = b_{n_0} - \cancel{b_{n_0+1}} + \cancel{b_{n_0+1}} - b_{n_0+2}$

$= b_{n_0} - b_{n_0+2}$

Allora $s_n = b_{n_0} - b_{n+1}$

In particolare il limite di s_n dipende dal limite di b_n.

ESEMPIO

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$a_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log(n) - \log(n+1)$$

la serie è telescopica e $b_n = \log n$

$$s_n = \log 2 - \log(n+1) \qquad (b_{n_0} - b_{n+1})$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \log 2 - \log(n+1) = -\infty$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ diverge a $-\infty$.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = -\sqrt{n} - (-\sqrt{n+1})$$

$$b_n = -\sqrt{n}$$

$$s_n = b_1 - b_{n+1} = -1 - (-\sqrt{n+1}) = \sqrt{n+1} - 1 \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

La serie diverge a $+\infty$.