Lezione 35

lunedì 20 dicembre 2021 09:02

Equazioni a variabili separabili (I ordine).

$$y' = g(x)\, h(y)$$

$g: I \to \mathbb{R}$, $h: J \to \mathbb{R}$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli

Abbiamo visto:

- Teorema di esistenza e unicità:

  Se $g \in C(I)$, $h \in C^1(J)$, allora $\forall x_0 \in I$, $y_0 \in J$:
  $\exists!$ la soluzione di
  $$\begin{cases} y' = g(x)\, h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
  definita su un intervallo $I_0 \subseteq I$ tale che $x_0 \in I$

- Metodo risolutivo:

$$y' = g(x)\, h(y)$$

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\, dx = \int g(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx$$

$$\Rightarrow H(y(x)) = G(g(x)) + C$$

oss

Se $y(x)$ è una soluzione di $y' = g(x)\, h(y)$ e $\exists\, x_0 \in I$ tale che $h(y(x_0)) = 0$, allora y è definita su tutto I e $y(x) = y(x_0)$ $\forall\, x \in I$.

DIM

L'idea è che $y(x)$ è una soluzione di $\begin{cases} y' = g(x)\,h(y) \\ y(x_0) =: y_0 \end{cases}$

Però se $h(y_0) = 0$, una soluzione del problema è $\bar{y}(x) = y_0 \quad \forall x \in I$. Infatti:

$\bar{y}'(x) = 0$ e $g(x)\,h(\bar{y}(x)) = g(x)\,h(y_0) = 0$

Per l'unicità della soluzione $y(x) = \bar{y}(x) = y_0 \quad \forall x$. □

Dunque $y' = g(x)\,h(y)$ ha:

- soluzioni costanti (dette anche SOLUZIONI DI EQUILIBRIO)
- Soluzioni per cui $h(y(x)) \neq 0 \quad \forall x$.

ESEMPIO 1

$$y' = x y^2$$

Equazione a variabili separabili con $g(x) = x$, $h(y) = y^2$.

- Cerchiamo le soluzioni di equilibrio:

  $h(y) = 0 \iff y^2 = 0 \iff y = 0$.

  La funzione $y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di equilibrio.

- Cerchiamo le altre soluzioni:

$$y' = x y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = x$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx = \int x\,dx \quad (*)$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C_2 = -\frac{1}{y(x)} + C_2$$

$$(*) \Rightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y(x)} = -\frac{1}{2}x^2 - C$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - C}.$$

Quindi le soluzioni dell' equazione sono:

$y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - C}$ e $y(x) = 0.$

ESEMPIO 2

$$y' = \frac{\cos(2x)}{y}$$

Variabili separabili $g(x) = \cos(2x)$, $h(y) = \frac{1}{y}$.

Nota: $h: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$.

Possiamo scegliere se prendere $y \in (0,+\infty)$ o $y \in (-\infty,0)$

- Cerca le soluzioni di equilibrio

  $h(y) = \frac{1}{y} \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

  Non ci sono soluzioni di equilibrio

- Cerchiamo le altre soluzioni:

$$y' = \frac{\cos(2x)}{y}$$

$$y'y = \cos(2x)$$

$$\int y'(x)y(x)\,dx = \int \cos(2x)\,dx$$

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C_1$$

$$\int y'(x)y(x)\,dx = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + C_2$$

$$\frac{1}{2}y(x)^2 = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

$$y(x)^2 = \sin(2x) + 2C$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\sin(2x) + 2C}$$

Le soluzioni sono:

$$y(x) = \sqrt{\sin(2x)+2c}\ , \quad y(x) = -\sqrt{\sin(2x)+2C}$$

ESEMPIO 3

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos(2x)}{y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Dato $y(0) = -2 < 0$ sappiamo che dobbiamo prendere $y \in (-\infty, 0)$.

Con i passaggi di prima:

si arriva a $y(x) = \pm\sqrt{\sin(2x)+C}$

Dato che $y(0) = -2 < 0 \Rightarrow y(x) = -\sqrt{\sin(2x)+C}$

Inoltre imponendo $y(0) = -2$ troviamo che

$$-\sqrt{\sin(0)+C} = -2$$

$$\sqrt{C} = 2 \qquad (C \geq 0)$$

$$C = 4$$

$$y(x) = -\sqrt{\sin(2x)+4}\ .$$

ESEMPIO 4

$$\begin{cases} y' = e^{3x}\sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'eq. $y' = e^{3x}\sin y$ è a variabili separabili
$g(x) = e^{3x}$, $h(y) = \sin y$.

- Dato che $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$
la soluzione del problema di Cauchy non è di equilibrio.

OSS: Dato che $\sin(y(x)) \neq 0$ $\forall x$ in cui y è definita e dato che y è continua nel suo dominio possiamo dire che $y(x) \in (0, \pi)$ $\forall x$

$$y' = e^{3x} \sin y$$

$$\frac{y'}{\sin y} = e^{3x}$$

$$\int \frac{1}{\sin y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$$

$$\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C_1$$

$$\int \frac{1}{\sin y}\, dy \longleftrightarrow \qquad t = tg\,\frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2\,arctg\, t$$

$$dy = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Inoltre $\sin y = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \log|t| + C_2 = \log\left(\left|tg\,\frac{y}{2}\right|\right) + C_2$$

$$= \log\left(tg\left(\frac{y}{2}\right)\right) + C_2$$ perché $y \in (0, \pi) \Rightarrow tg\,\frac{y}{2} > 0$.

Quindi:

$$\log\left(tg\left(\frac{y}{2}\right)\right) = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

Conviene trovare subito C usando $y(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\log\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{3} e^{0} + C$$

$$0 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

Quindi:

$$\log\left(tg\left(\frac{y}{2}\right)\right) = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}$$

$$tg\left(\frac{y}{2}\right) = e^{\frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{y}{2} = arctg\left(e^{\frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}}\right)$$

$$y(x) = 2\, arctg\left(e^{\frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}}\right)$$

ESEMPIO 5

$$\begin{cases} x y' + y^3 = 0 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

<0

$$x y' + y^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{y^3}{x}$$

l'eq. è a variabili separabili con $g(x) = -\frac{1}{x}$, $h(y) = y^3$

$g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lavoriamo con $x \in (-\infty, 0)$ perché abbiamo la condizione iniziale $y(-1) = 1$ in $x = -1$.

- Dato che $h(1) = 1 \neq 0$ la soluzione del problema non è di equilibrio.
- $y' = -\frac{1}{x} y^3$

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{y^3}\, dy = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\log|x| + C_1$$

$$\int \frac{1}{y^3}\, dy = \int y^{-3}\, dy = \frac{1}{-3+1} y^{-3+1} + C_2$$

$$= -\frac{1}{2} y^{-2} + C_2 = -\frac{1}{2y^2} + C_2$$

Quindi:

$$-\frac{1}{2y^2} = -\log|x| + C$$

$$\frac{1}{2y^2} = \log|x| - C$$

Conviene trovare subito C imponendo $y(-1) = 1$

$$\frac{1}{2\, 1^2} = \log|-1| - C \Rightarrow \frac{1}{2} = -C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\frac{1}{2y^2} = \log|x| + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y^2} = 2\log|x| + 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2\log|x| + 1}$$

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\log|x| + 1}}$$

Dato che $y(-1) = 1 > 0$ segno corretto è quello positivo.

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\log|x| + 1}}$$

ESEMPIO 6

$$\begin{cases} y' y \cos x = \operatorname{tg} x \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

$$y' y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$$

$$\int y \, dy = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \, dx$$

$$\int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 + c_1$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

$t = \cos x$
$dt = -\sin x \, dx$

$$= \int \frac{1}{t^2} (-dt)$$

$$= -\int \frac{1}{t^2} \, dt = \frac{1}{t} + c_2 = \frac{1}{\cos x} + c_2$$

Quindi abbiamo:

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{\cos x} + c$$

Troviamo c imponendo $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\frac{1}{2}(-1)^2 = 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

Dunque:

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{\cos x} - \frac{3}{2}$$

$$y^2 = \frac{2}{\cos x} - 3$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\cos x} - 3} \quad \text{ma} \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$$

quindi il segno corretto è $-$

La soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{2}{\cos x} - 3}$$

ESEMPIO 1

$$\begin{cases} y' = (1-y^2)\, x^2 \\ y(2) = -1 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili con $h(y) = 1-y^2$ e $g(x) = x^2$

Dato che $h(-1) = 0$, allora la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = -1 \quad \forall x$.

ESEMPIO 2

$$\begin{cases} y'(x) = (1-y^2)\, x^2 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Adesso $h(0) = 1 \neq 0$ quindi la soluzione non è di equilibrio.

Nota: $h(y) = 1 - y^2 = 0 \iff y = \pm 1$

Ci sono due soluzioni di equilibrio e sappiamo che tutte le altre soluzioni dell'eq. sono sempre diverse da 1 e -1.

In particolare, la soluzione con $y(2)=0$ soddisfa $y(x) \in (-1,1)$ $\forall x$ in cui è definita.

$$y' = (1-y^2)x^2$$

$$\frac{y'}{1-y^2} = x^2$$

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = ?$$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y}$$
$$= \frac{A(1+y)+B(1-y)}{1-y^2} = \frac{y(A-B)+A+B}{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=B \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-y} + \frac{\frac{1}{2}}{1+y}\,dy = -\frac{1}{2}\log|1-y| + \frac{1}{2}\log|1+y| + C_2$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{|1+y|}{|1-y|} + C_2 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + C_2$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Troviamo C usando $y(2)=0$.

$$\frac{1}{2}\log 1 = \frac{8}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}$$

$$\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}$$

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}}$$

$$1+y = e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}}(1-y)$$

$$= e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}} - y\, e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}}$$

$$y + y\, e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}} = e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}} - 1$$

$$y = \frac{e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}} - 1}{e^{\frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}} + 1}$$

Notazione che si usa in fisica:

$$y' = g(x)\, h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y)$$

$$\text{"}\ \frac{dy}{h(y)} = g(x)\, dx\ \text{"} \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\, dx$$

EQUAZIONI LINEARI DI II ORDINE (a coefficienti costanti)

Sono equazioni del tipo

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = g(x)$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

L'equazione si dice OMOGENEA se $g(x) = 0\ \forall x \in I$
altrimenti si dice NON OMOGENEA / COMPLETA

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Se y_1 e y_2 sono soluzioni di $a y'' + b y' + c y = g_1(x)$ e $a y'' + b y' + c y = g_2(x)$, allora

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $\alpha y_1 + \beta y_2$ risolve
$ay'' + by' + cy = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$.

Caso omogeneo

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Def: Il polinomio $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ si dice POLINOMIO CARATTERISTICO dell'equazione differenziale.
L'equazione $p(\lambda) = 0$ si dice EQUAZIONE CARATTERISTICA

OSS 1

Se $\bar{\lambda}$ è una di radice di $p(\lambda)$ (cioè $p(\bar{\lambda}) = 0$) allora $y(x) = e^{\bar{\lambda}x}$ è una soluzione dell'equazione omogenea.

DIM

$y(x) = e^{\bar{\lambda}x}$, $y'(x) = e^{\bar{\lambda}x}\bar{\lambda}$, $y''(x) = e^{\bar{\lambda}x}\bar{\lambda}^2$

quindi

$$\begin{aligned} a y''(x) + b y'(x) + cy(y) &= a e^{\bar{\lambda}x}\bar{\lambda}^2 + b e^{\bar{\lambda}x}\bar{\lambda} + c e^{\bar{\lambda}x} \\ &= e^{\bar{\lambda}x}(a\bar{\lambda}^2 + b\bar{\lambda} + c) \\ &= e^{\bar{\lambda}x} p(\bar{\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

OSS 2

Se $p(\lambda) = a(\lambda - \bar{\lambda})^2$ allora anche $e^{\bar{\lambda}x} x$ è una soluzione.

OSS 3

Ricordiamo che $\bar{\lambda} = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora

$$e^{\bar{\lambda}x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

TEOREMA

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Consideriamo l'eq. omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$.

1) Se $\Delta = b^2 - 4ac$, allora l'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ha due soluzioni reali λ_1, λ_2 e la soluzione generale è
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2) Se $\Delta = 0$, allora l'equazione caratteristica ha una sola soluzione $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e la soluzione generale è
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 e^{\lambda_0 x} x$$

3) Se $\Delta < 0$, allora l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e la soluzione generale è
$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

ESEMPIO 1

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Eq. caratteristica $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

La soluzione generale è $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

ESEMPIO 2

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Eq. caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$$(\lambda + 1)^2 = 0 \implies \lambda = -1$$

La soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} x$$

ESEMPIO 3

$$y'' - 6y' + 25y = 0$$

Eq. caratteristica: $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-25}}{1} = 3 \pm \sqrt{-16}$$
$$= 3 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}$$
$$= 3 \pm 4i$$

la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{3x} \cos(4x) + c_2 e^{3x} \operatorname{sen}(4x)$$

ESEMPIO 4

$$y'' + 4y = 0$$

Eq. caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$
$= 0 \pm 2i$

La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{0x} \cos(2x) + c_2 e^{0x} \sin(2x)$$
$$= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$