Lezione 33

mercoledì 15 dicembre 2021 09:04

- **Equazioni differenziali ordinarie:**
- $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

sono equazioni in cui compare una funzione y (che dipende dalla variabile x) e alcune delle derivate di y.

- n (cioè l'ordine massimo di derivazione con cui y appare nell'equazione) si dice **ORDINE** dell'eq.
- L'equazione differenziale si può scrivere in **FORMA NORMALE**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

- Una **SOLUZIONE** dell'equazione è una funzione $y: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, derivabile n volte in I e tale che $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall\, x \in I$.

Tipici esercizi:

1) Determinare l'integrale generale (tutte le soluzioni)

2) Risolvere un problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su f la soluzione di probl. di Cauchy esiste ed è unica.

3) Determinare tutte le soluzioni che soddisfano altri tipi di condizioni.

Equazioni "integrabili"

$$y^{(n)} = f(x)$$

Si risolvono integrando n volte $f(x)$.

ESEMPIO

$$y''' = \cos x$$

Per trovare la soluzione integro 3 volte:

$$y'' = \int \cos x \, dx = \sin x + C_1$$

$$y' = \int \sin x + C_1 \, dx = -\cos x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int -\cos x + C_1 x + C_2 \, dx$$

$$= -\sin x + C_1 \frac{1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

L'integrale generale è:

$$y(x) = -\sin x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

Equazioni lineari di I ordine

Equazioni del tipo:

$$y' = a(x) y + g(x)$$

$a, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, a, g continue in I.

- L'equazione si dice OMOGENEA se $g(x) = 0 \ \forall x \in I$
  ($y' = a(x)\, y$)
- Altrimenti (cioè se $g \neq 0$) l'equazione si dice NON OMOGENEA (o COMPLETA).

Caso omogeneo:

$$y' = a(x)\, y$$

Abbiamo già visto un esempio:

- $$y' = y$$
  è lineare omogenea con $a(x) = 1 \ \forall x \in I$.
  L'integrale generale è:
  $$y(x) = K e^{x}.$$

- $$y' = 2y$$
  Soluzione generale: $y(x) = K e^{2x}$

TEOREMA

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $a: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora la soluzione generale dell'equazione

$y' = a(x)\, y$ è data da

$$y(x) = K e^{A(x)}$$

dove $A: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di a in I.

OSSERVAZIONE

Se A_1 e A_2 sono due primitive allora $\exists\, c$ t.c. $A_1 = A_2 + C$. Quindi:

$$K e^{A_1(x)} = K e^{A_2(x)+C} = \underbrace{K e^{c}}_{K_2} e^{A_2(x)} = K_2 e^{A_2(x)}.$$

ESEMPIO 1

$$y' = x\,y$$

Eq. lineare di I ordine omogenea con $a(x) = x$

$$\int a(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$A(x) = \frac{1}{2}x^2$$

La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = K e^{\frac{1}{2}x^2}$$

ESEMPIO 2

$$y' = \sin(2x)\;y$$

L'equazione è lineare omogenea di I ordine con $a(x) = \sin(2x)$

$$\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

Se sappiamo che $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Scegliamo $A(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

La soluzione generale è

$$y(x) = K e^{-\frac{1}{2}\cos(2x)}$$

ESEMPIO 3

$$y' = x y \log(2x+1) \qquad \text{in} \quad \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

E' un'eq. lineare omogenea di I ordine con

$$a(x) = x \log(2x+1)$$

$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\log(2x+1)}_{g} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{2x+1} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \int \frac{x^2}{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \int \frac{1}{4} \frac{4x^2-1+1}{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{4x^2-1}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}\int (2x-1) + \frac{1}{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}\left(x^2 - x + \int \frac{1}{2x+1} \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\log|2x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\log(2x+1) + C$$

Scelgo $A(x) = \frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\log(2x+1)$

La soluzione generale è:

$$y(x) = K e^{A(x)} = K e^{\frac{1}{2}x^2 \log(2x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\log(2x+1)}$$

ESEMPIO 4

Risolvere
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{(3x-1)^2} = \dfrac{1}{(3x-1)^2}\, y \\ y(0) = e \end{cases}$$

L'equazione è lineare omogenea con $a(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{(3x-1)} + C$$

$$\left[\ \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{-2+1}\, y^{-2+1} + C = -\,y^{-1} + C = -\frac{1}{y} + C\ \right]$$

Scelgo $A(x) = -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{(3x-1)}$

La soluzione generale dell'equazione

$$y(x) = K e^{-\frac{1}{3}\frac{1}{(3x-1)}}$$

Imponiamo $y(0) = e$

$$y(0) = K e^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}} = K e^{\frac{1}{3}} \overset{!}{=} e$$

quindi $K = \dfrac{e}{e^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{2}{3}}$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = e^{\frac{2}{3}}\, e^{-\frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}}$$

Equazioni lineari di I ordine non omogenee.

$$y' = a(x)\, y + g(x).$$

OSS (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

Consideriamo due equazioni del tipo

$y' = a(x)\, y + g_1(x)$ e $y' = a(x)\, y + g_2(x)$.

Siano y_1 una soluzione della prima equazione e y_2 una soluzione della seconda equazione. Allora la funzione $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risolve l'equazione:

$$z' = a(x)\, z + \alpha g_1(x) + \beta g_2(x).$$

In particolare se $g_1 = g_2$ allora $y_1 - y_2$ è soluzione di $y' = a(x)\, y$.

CONSEGUENZA

Se conosciamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ di $y' = a(x)\, y + g(x)$ allora la soluzione generale è data da $\bar{y}(x) + y_0(x)$ dove y_0 è la soluzione generale dell'eq. omogenea $y' = a(x)\, y$.

Ricapitolando:

Per risolvere $y' = a(x)\, y + g(x)$:

1) Considero l'equazione omogenea $y' = a(x)\, y$. Ne scriviamo la soluzione generale $y_0(x)$.

2) Cerco di trovare una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ dell'equazione completa.

Due metodi:

- Metodo di variazione delle costanti:

  Cerco una soluzione del tipo:

  $\bar{y}(x) = K(x) e^{A(x)}$ dove A è una primitiva di a.

- Metodo di similarità (funziona solo se $a(x) = a$ (costante))

  L'idea è cercare $\bar{y}(x)$ simile a $g(x)$.

ESEMPIO (con il metodo di variazione delle costanti)

- $y' = \frac{y}{x} + x^2$ con $x \in (0, +\infty)$

1) Consideriamo l'equazione omogenea

$y' = \frac{y}{x}$ $\quad a(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$
$$= \log x + c$$

Scegliere $A(x) = \log x$

La soluzione generale dell'eq. omogenea è

$y_0(x) = K e^{\log x} = Kx$

2) Cerco una soluzione particolare dell'equazione completa.

$\bar{y}(x) = K(x)\, x$

Imponiamo che $\bar{y}' = \dfrac{\bar{y}}{x} + x^2$

$\bar{y}'(x) = K'(x)\, x + K(x)$

$$K'(x)\, x + K(x) = \frac{K(x)\cancel{x}}{\cancel{x}} + x^2$$

$$K'(x)\, x + \cancel{K(x)} = \cancel{K(x)} + x^2$$

$$K'(x)\, x = x^2$$

$$K'(x) = x \quad (*)$$

$$K(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

Scelgo $K(x) = \frac{1}{2} x^2$

Una soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = K(x)\, x = \frac{1}{2} x^2 \cdot x = \frac{1}{2} x^3.$$

La soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = \frac{1}{2} x^3 + K x$$

ESEMPIO 2

$$y'(x) = 4x^3 y - e^{x^4} \cos(2x)$$

Eq. lineare di I ordine non omogenea con

$a(x) = 4x^3$, $g(x) = -e^{x^4} \cos(2x)$.

1) Eq. omogenea $y' = 4x^3 y$

$$\int 4x^3 \, dx = x^4 + C$$

Scelgo $A(x) = x^4$

La soluzione generale dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = K e^{x^4}.$$

2) Cerco una soluzione particolare dell'eq. completa.

$$\bar{y}(x) = K(x) e^{x^4} \qquad \boxed{y' = 4x^3 y - e^{x^4}\cos(2x)}$$

$$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{x^4} + K(x) e^{x^4} 4x^3.$$

$$= K'(x) e^{x^4} + 4x^3 K(x) e^{x^4}.$$

Allora l'equazione è soddisfatta se

$$\underbrace{K'(x) e^{x^4} + \cancel{4x^3 K(x) e^{x^4}}}_{\bar{y}'} = \underbrace{\cancel{4x^3 K(x) e^{x^4}}}_{\bar{y}} - e^{x^4}\cos(2x)$$

$$K'(x) e^{x^4} = - e^{x^4}\cos(2x)$$

$$K'(x) = -\cos(2x)$$

$$K(x) = \int -\cos(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

Scelgo $K(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x)$

Quindi $\bar{y}(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x)\, e^{x^4}$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x)\, e^{x^4} + K e^{x^4}$$

ESERCIZIO

$$y'(x) = \frac{y}{2x} + \frac{1}{1-4x} \qquad \text{con } x \in (0, \tfrac{1}{4})$$

Eq lineare non omogenea di I ordine.

$$a(x) = \frac{1}{2x}, \quad g(x) = \frac{1}{1-4x}$$

1) Considera l'eq. omogenea:

$$y' = \frac{1}{2x} y$$

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\log|x| + C = \frac{1}{2}\log x + C \quad (\text{in } (0, \tfrac{1}{4}))$$

Scelgo $A(x) = \frac{1}{2}\log x$.

La sol. generale dell'eq. omogenea è:

$$y_0(x) = K e^{\frac{1}{2}\log x} = K x^{\frac{1}{2}} = K\sqrt{x}.$$

2) Cerchiamo la soluzione particolare dell'equazione completa.

$$\left\ulcorner y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{1-4x} \right\lrcorner$$

$$\bar{y}(x) = K(x)\sqrt{x}$$

$$\bar{y}'(x) = K'(x)\sqrt{x} + K(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= K'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{K(x)}{\sqrt{x}}$$

Vogliamo

$$K'(x)\sqrt{x} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{K(x)}{\sqrt{x}}} = \cancel{\frac{K(x)\sqrt{x}}{2x}} + \frac{1}{1-4x}$$

$$K'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1-4x)}$$

$$K(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-4x)}\,dx \qquad x = t^2$$

$$\left\lceil \int R(\sqrt{ax+b}, x) \qquad ax+b = t^2 \right\rfloor$$

$x = t^2$
$dx = 2t\,dt$

$$K(x) = \int \frac{1}{t(1-4t^2)}\,2t\,dt$$

$$= \int \frac{2}{1-4t^2}\,dt$$

$$\frac{2}{1-4t^2} = \frac{2}{(1-2t)(1+2t)} = \frac{A}{1-2t} + \frac{B}{1+2t} = \frac{A(1+2t) + B(1-2t)}{1-4t^2}$$

$$= \frac{t(2A-2B) + A+B}{1-4t^2}$$

$$\begin{cases} 2A-2B = 0 \\ A+B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2}{1-4t^2}\,dt = \int \frac{1}{1-2t} + \frac{1}{1+2t}\,dt = \frac{\log(|1-2t|)}{-2} + \frac{\log(|1+2t|)}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log(|1+2t|) - \frac{1}{2}\log(|1-2t|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log(|1+2\sqrt{x}|) - \frac{1}{2}\log(|1-2\sqrt{x}|) + C$$

$$(x\in(0,\tfrac{1}{4})) \quad = \frac{1}{2}\log(1+2\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\log(1-2\sqrt{x}) + C$$

Scelgo $K(x) = \frac{1}{2}\log(1+2\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\log(1-2\sqrt{x})$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}\right)$$

Quindi $\bar{y}(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}$

e la soluzione generale dell' eq. completa è

$$y(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x} + K\sqrt{x} \quad , K \in \mathbb{R}.$$