Lezione 32

giovedì 9 dicembre 2021 00:02

Integrali impropri

Def: Sia $f: [a, b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $b > a$.

Si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $[a, b)$ se

- f è integrabile in $[a, c]$ $\forall\, c \in (a, b)$
- esiste finito il limite $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$ (se $b = +\infty$ il limite è per $c \to +\infty$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

- Si dice che l'integrale è CONVERGENTE se f è integrabile in senso improprio in $[a, b)$
- Si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ è DIVERGENTE se $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx = +\infty$ (o $-\infty$)
- Si dice l'integrale non è definito se il limite non esiste.

Def Sia $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b < +\infty$, si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $(a, b]$ se:

- f è integrabile in $[c, b]$ $\forall\, c \in (a, b)$
- esiste finito il limite $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$

ESEMPI

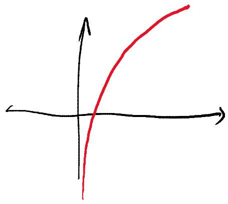
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ — è convergente se $\alpha > 1$; è divergente se $\alpha \leq 1$.
- $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ è convergente
- $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ non è definito

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$

 - Se $\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \log x \Big|_c^1 = \lim_{c \to 0^+} 0 - \log c = +\infty$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ è divergente



 - Se $\alpha \neq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_c^1$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} c^{1-\alpha}$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - c^{1-\alpha}\right) \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha > 0 \ (\alpha < 1) \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Riassumendo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Attenzione: non confondere con

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Def: Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN (a, b) se $\exists\ c \in (a, b)$ tale che f è integrabile in senso improprio sia in $(a, c]$ che in $[c, b)$.

OSS

La definizione non dipende dalla scelta di c.

ESEMPIO

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Dato che uno dei due integrali è divergente

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ è divergente

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^c = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} c - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ è convergente

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} 0 - \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}$$

anche in questo caso l'integrale è convergente.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ è convergente

Attenzione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

In questo caso $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = +\infty$ è divergente

$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\infty$ è divergente

dunque la funzione non è integrabile in $\mathbb{R}$.

Anche se $\int_{-c}^{c} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$ si ha che

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ non è definito

---

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a, c]$ $\forall c \in (a, b)$. Se $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0, +\infty)$ e se $f, g \geq 0$ in $[a, b)$ allora:

- $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente $\Longleftrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ è convergente
- $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente $\Longleftrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ è divergente

ESEMPIO

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}}_{\to 1 \text{ per } x \to +\infty}} \sim \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

cioè

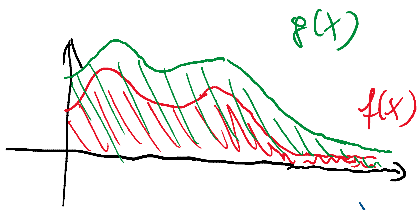
$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^4}} \Big/ \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}} \xrightarrow{x \to +\infty} 1$$

Per il criterio del confronto asintotico

$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\,dx$

Siccome $\frac{5}{3} > 1$ gli integrale sono convergenti.

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO)



Siano $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$

(in realtà basta che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to b^-$)

Supponiamo anche che f, g siano integrabili in $[a, c]$

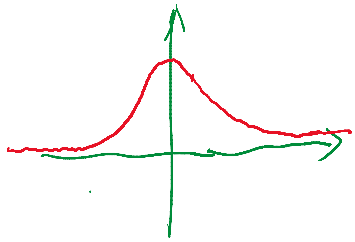
$\forall c \in [a, b)$. Allora:

1) Se $\int_a^b g(x)\,dx$ è convergente, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente

2) Se $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente, allora $\int_a^b g(x)\,dx$ è divergente

ESEMPIO

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente?



Se $x \geq 1$, $x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$

Possiamo dire che $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ definitivamente per $x \to +\infty$.

Allora dato che

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ è convergente

Il teorema del confronto dice che anche $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

Equazioni differenziali ordinarie

Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui compaiono:

- Una variabile x.
- Una funzione incognita $y(x)$.
- Alcune derivate di $y(x)$.

ESEMPI

- $y'(x) + x\, y(x) = 0$
- $y''(x) - y'(x) = x \cos(y(x))$
- $\dfrac{y'''(x) + 1}{1 + (y'(x))^2} = y'(x) - y(x)$

In generale possiamo dire che un'equazione differenziale ordinaria (EDO / ODE) è un'espressione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

dove $F : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$

Il numero $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si dice ORDINE dell'equazione.

ESEMPI

- $y'(x) + y(x) = 2x\, y(x)$ è un'equazione diff. di ordine 1.
- $y'''(x) = x^2 (y''(x) + y(x))$ ordine 3

Spesso nelle equazioni differenziali si scrive solo y al posto di $y(x)$

$y'(x) + y(x) = 2x\, y(x)$ si scrive come
$y' + y = 2xy$.

- Un'equazione differenziale si dice in FORMA NORMALE se è del tipo:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Si può portare un'equazione in forma normale esplicitando $y^{(n)}$

ESEMPIO:

$y' + y = 2xy$ si scrive come $y' = 2xy - y$

così è in forma normale.

Solitamente un'equazione differenziale ha infinite soluzioni.

ESEMPI

$$y' = y$$

Una soluzione è $y(x) = e^x$.

Un'altra soluzione è $y(x) = 0$

" " " è $y(x) = 2e^x$

" " " è $y(x) = Ke^x$ con $K \in \mathbb{R}$.

Si può dimostrare che le soluzioni sono tutte del tipo

$y(x) = Ke^x$ con $K \in \mathbb{R}$.

Definizione

Si dice INTEGRALE GENERALE dell'equazione l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione.

ALTRI ESEMPI

$$y'' = -y$$

$y(x) = \sin x$ è soluzione

$y(x) = \cos x$ è soluzione

Più in generale tutte le funzioni del tipo

$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ sono soluzioni

(è l'integrale generale).

- Il problema del tipo

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

si dice PROBLEMA DI CAUCHY associato all'equazione

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$y' = x^2$

l'integrale generale è dato da

$$y(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

L'integrale generale dell'equazione è $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

Per risolvere il problema di Cauchy dobbiamo trovare c.

$y(0) = 2$

$y(0) = \frac{1}{3}0^2 + c = C$ se vogliamo che $y(0) = 2$

allora $c = 2$

Quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è:

$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$.

$$\begin{cases} y'' = x \\ y(1) = \frac{3}{2} \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

$y'' = x$

$y' = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

$y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

$y = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) dx = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

L'integrale generale dell'equazione è

$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

$y(1) = \frac{1}{6} + c_1 + c_2$ vogliamo che $y(1) = \frac{3}{2}$ cioè

$c_1 + c_2 + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$

$y'(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

$y'(1) = \frac{1}{2} + c_1$ vogliamo $y'(1) = 0$ cioè

$\frac{1}{2} + c_1 = 0$

Vogliamo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{6} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} + c_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + c_2 + \frac{1}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$c_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

Quindi la soluzione del problema è

$y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{6}$.

- $y' = f(x)$

L'integrale generale è $y(x) = \int f(x)\,dx$

- $y^{(n)} = f(x)$

L'integrale generale è:

$y(x) = \int\int\left(\int \dots \left(\int f(x)\,dx\right) dx\right) dx \dots$

Non tutte le equazioni si possono risolvere in modo così semplice.

ESEMPIO

$y' = y$

$\frac{y'}{y} = 1$ cioè $\left(\log|y|\right)' = 1$

$\log|y(x)| = \int 1\,dx = x + c_0$

$\log|y(x)| = x + c_0$

$|y(x)| = e^{x+c_0}$

$y(x) = \pm e^{x+c_0} = \underbrace{\pm e^{c_0}}_{K} e^x$

Posso dire che le soluzioni sono del tipo

$y(x) = K e^x$.

L'integrale generale è $y(x) = K e^x$.