Lezione 22

lunedì 22 novembre 2021 09:03

Studio di funzioni

1) Dominio
2) Eventuali simmetrie / funzioni periodiche.
3) studio del segno / intersezioni con gli assi
4) limiti asintoti
5) derivabilità e calcolo della derivata
6) monotonia della funzione / max e min locali
7) Disegnare il grafico

ESERCIZIO 1

1) Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{3x-4}$
2) Disegnare il grafico di $|f(x)|$
3) Determinare i punti di max / min assoluto e locale per f in $[-2, 1]$.

- Dominio : $x \neq \frac{4}{3}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(-\infty, \tfrac{4}{3}\right) \cup \left(\tfrac{4}{3}, +\infty\right) = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{4}{3}\right\}$$

- Simmetrie : f non è pari né dispari.

- Segno :

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{3x-4} \geq 0 \iff 3x-4 > 0 \iff x > \frac{4}{3}$$

Intersez. asse y : $f(0) = -\frac{1}{4}$

$(0, -\frac{1}{4})$ è punto di intersezione del grafico con l'asse y

Intersezioni asse x : non ci sono intersezioni.
$(f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f))$

• **Limiti**: $\quad Dom(f) = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{3x-4} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}}{3x-4} \qquad f.i. \quad \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$\overset{D.L.H\ ?}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}\cdot(-2)}{3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{3}e^{-2x} = \underset{\text{OK}}{-\infty}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}^+} \frac{e^{-2x}}{3x-4} = \frac{e^{-\frac{8}{3}}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{4}{3}\right)^-} \frac{e^{-2x}}{3x-4} = \frac{e^{-\frac{8}{3}}}{0^-} = -\infty.$$

• La retta $y=0$ è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

• La retta $x=\frac{4}{3}$ è asintoto verticale

• Vediamo se c'è asintoto obliquo per $x\to-\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad m_{\to-\infty} \frac{e^{-2x}}{3x-4} \Big/ x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e}{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}}{3x^2-4x} \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \quad f.i.$$

$$\overset{D.L.H(?)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{e\ldots}}{6x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^{-2x}}{6x-4} \qquad \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\overset{D.L.H\ ?}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4e^{-2x}}{6} = +\infty. \quad \text{OK}$$

no asintoto obliquo.

• **Derivata**:

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{3x-4} \qquad f \text{ è derivabile in tutti i punti del dominio}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^{-2x}(3x-4) - e^{-2x}\,3}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{-e^{-2x}\left(2(3x-4)+3\right)}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{-e^{-2x}(6x-5)}{(3x-4)^2} = \frac{e^{-2x}(5-6x)}{(3x-4)^2}$$

- Segno della derivata / monotonia:

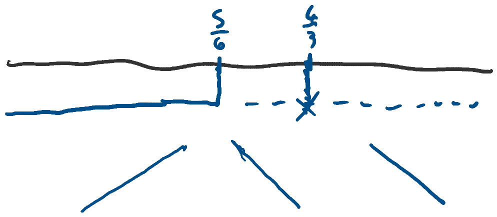
$e^{-2x} > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$

$(3x-4)^2 > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$.

Il segno coincide con il segno di $5-6x$ e

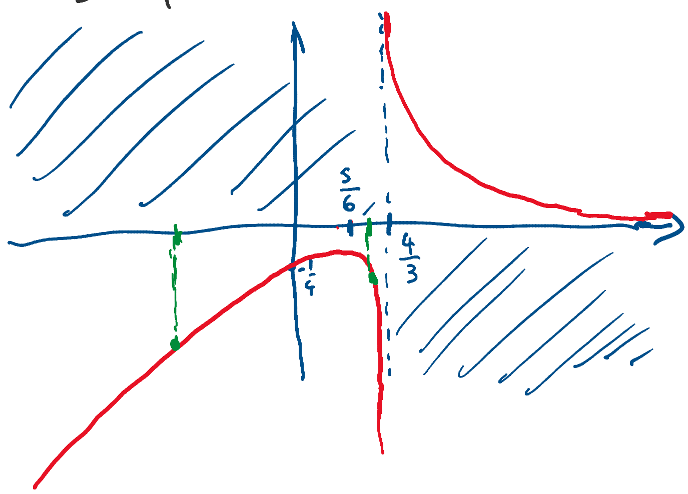
$5-6x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{6}$

Nota: $\frac{5}{6} < \frac{4}{3}$

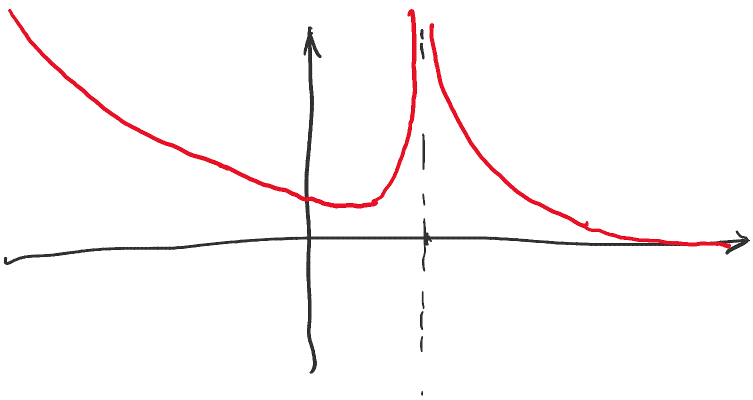


$$f\left(\tfrac{5}{6}\right) = \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{\frac{5}{2}-4} = -\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{3}}$$

- Grafico:



2) Disegnare il grafico di $|f(x)|$



3) Determinare i punti di max / min per f in $[-2, 1]$

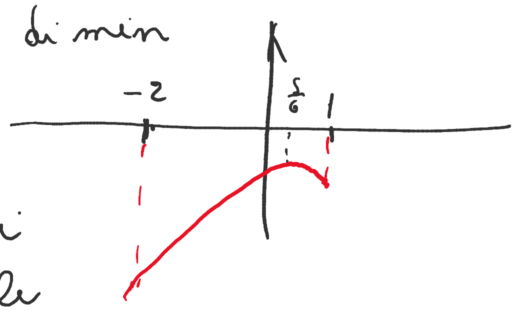
$$f(1) = \frac{e^{-2}}{3-4} = -e^{-2}$$

$$f(-2) = \frac{e^{4}}{-6-4} = -\frac{e^{4}}{10}$$

$$f(-2) < f(1).$$

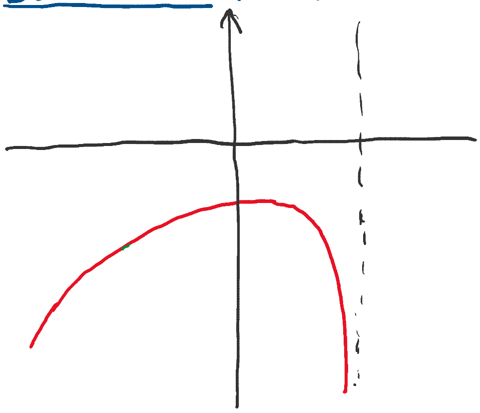
$x=-2$ e $x=1$ sono punti di minimo locale

$x=-2$ è l'unico punto di min assoluto e $\min_{[-2,1]} f = -\frac{e^4}{10}$

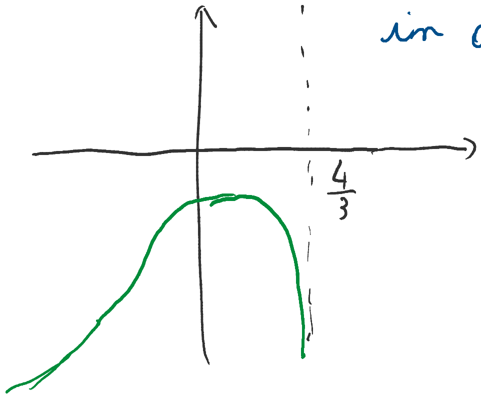


$x=\frac{5}{6}$ è l'unico punto di massimo assoluto e locale e $\max_{[-2,1]} f = f\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{2}{3} e^{-\frac{5}{3}}$.

Domanda: Per $x \to -\infty$ il grafico si può disegnare in diversi modi.



o

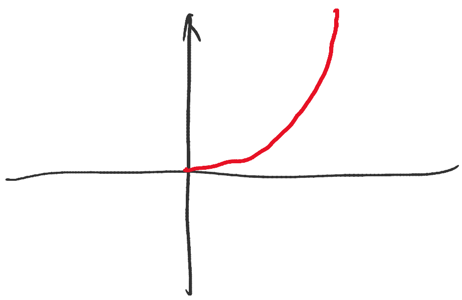


Quale dei due grafici è corretto?

Questo problema si ha ogni volta che un limite è $\pm\infty$.

$f(x) = \log x$

$f(x) = x^2$



Def: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$. Se f è derivabile in (a,b) (basta derivabile in un intorno di x_0) allora $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ (o $f:U\to\mathbb{R}$, U intorno di x_0) è una funzione.

Se f' è derivabile in x_0, si dice che f è DUE VOLTE DERIVABILE in x_0 e il valore $(f')'(x_0)$ si dice DERIVATA SECONDA di f in x_0.

Si indica questo valore con $f''(x_0)$ o $\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|_{x=x_0}$ o $f^{(2)}(x_0)$.

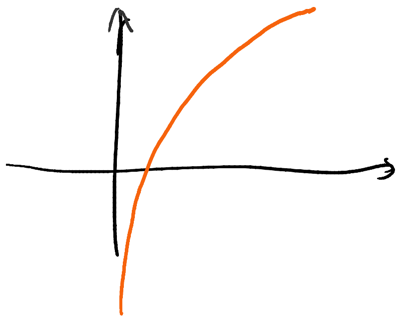
- Dove $f''>0$ il grafico di f ha concavità verso l'alto: 
- Dove $f''<0$ il grafico ha concavità verso il basso. 

ESEMPI:

- $f(x)=\log x$

  $f'(x)=\frac{1}{x}$

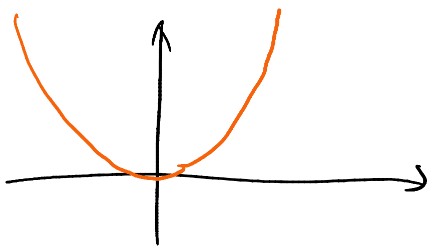
  $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$



- $f(x)=x^2$

  $f'(x)=2x$

  $f''(x)=2>0$



- I punti in cui f'' cambia segno si dicono PUNTI DI FLESSO.

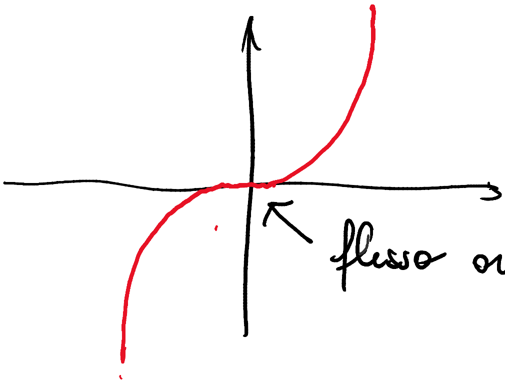
$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'' > 0$ se $x > 0$

$f'' < 0$ se $x < 0$

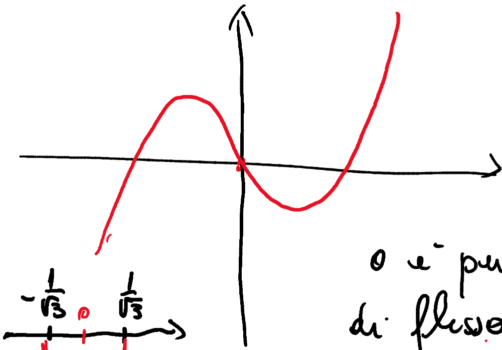


flesso orizzontale

- $f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

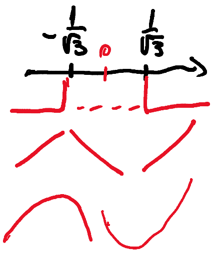
$f''(x) = 6x$



0 è punto di flesso obliquo.

$f' \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'' \geq 0 \iff x \geq 0$



Nell'esempio precedente:

$$f''(x) = -\frac{e^{-2x}(36x^2 - 60x + 34)}{(3x-4)^2}$$

$f''(x) < 0$ per $x \to -\infty$

per questo motivo il grafico ha concavità verso il basso.

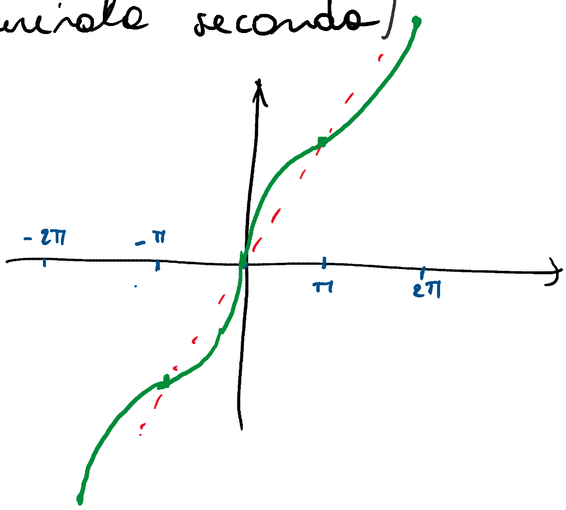
ESEMPIO (importanza della derivata seconda)

$f(x) = 2x + \sin x$

$f'(x) = 2 + \cos x > 0$

quindi f è strettamente crescente.

$f''(x) = -\sin x \geq 0$.



ESERCIZIO 2

$f(x) = \dfrac{\log x}{(\log x + 2)^2}$. Studiare la funzione $f(x)$

1) $\mathrm{Dom}(f) = \,?$

$\begin{cases} x > 0 \\ \log x + 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-2} \end{cases}$

$\mathrm{Dom}(f) = (0, e^{-2}) \cup (e^{-2}, +\infty)$.

2) Non ci sono simmetrie (il dominio non è simmetrico)

3) Segno:

$f(x) = \dfrac{\log x}{(\log x + 2)^2}$ il segno è determinato solo dal numeratore

$f(x) \geq 0 \iff \log x \geq 0 \iff x \geq 1$

- Asse y: nessuna intersezione perché $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$.
- Asse x: $f(x) = 0 \iff \log x = 0 \iff x = 1$
  $(1, 0)$ è punto di intersezione tra il grafico e l'asse x.

4) Limiti: $\mathrm{Dom}(f) = (0, e^{-2}) \cup (e^{-2}, +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{(\log x + 2)^2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{\log x}}{\log^{\cancel{2}} x \left(1 + \frac{2}{\log x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\log x \left(1 + \frac{2}{\log x}\right)}$

$= \dfrac{1}{+\infty \cdot 1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{(\log x + 2)^2} = 0$ (come sopra)

$$\lim_{x \to e^{-2}} \frac{\log x}{(\log x + 2)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

- $x = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
- $y = 0$ è asintoto verticale (destro)
- $y = e^{-2}$ è asintoto verticale

5) <u>Derivata</u>:
f è rapporto di composizioni di funzioni derivabili quindi è derivabile in tutti i punti del suo dominio.

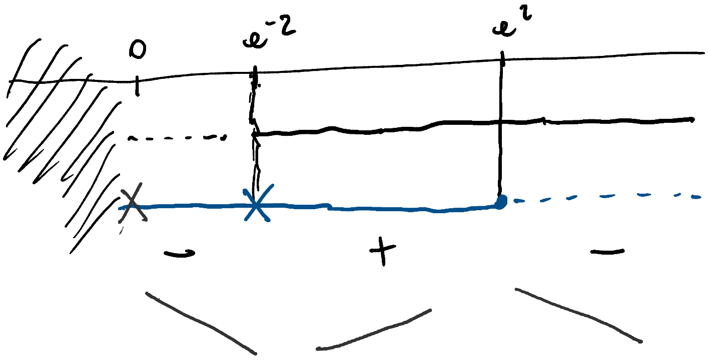
$$f(x) = \frac{\log x}{(\log x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\log x + 2)^2 - \log x \cdot 2(\log x + 2) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x + 2)^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cancel{(\log x + 2)}\,(\log x + 2 - 2\log x)}{(\log x + 2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(2 - \log x)}{(\log x + 2)^3} = \frac{2 - \log x}{x(\log x + 2)^3}$$

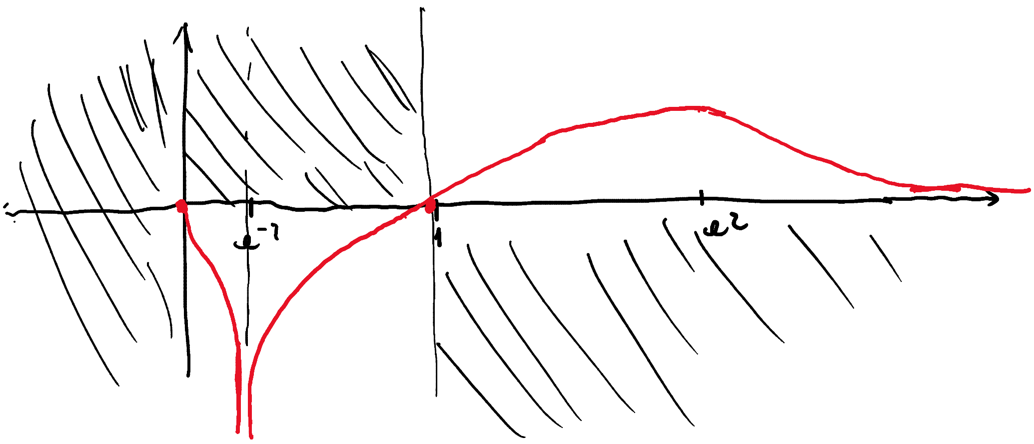
$x > 0$ nel dominio



$\log x + 2$

Numeratore: $2 - \log x \geq 0$
$\iff \log x \leq 2$
$\iff x \leq e^2$

Grafico



Calcoliamo $\lim_{x \to 0} f'(x)$ per capire con che pendenza "parte" da 0 il grafico di f.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \ln x}{x(\ln x + 2)^3}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x(\log x + 2)^3 \qquad \text{f.i. } 0 \cdot (-\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x \log^3 x \underbrace{\left(1 + \frac{2}{\log x}\right)^3}_{1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x \log^3 x$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\log^3 x}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3 \log^2 x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-3 \log^2 x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-3 \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{6 \log x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{6 \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-6}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} -6x = 0$$

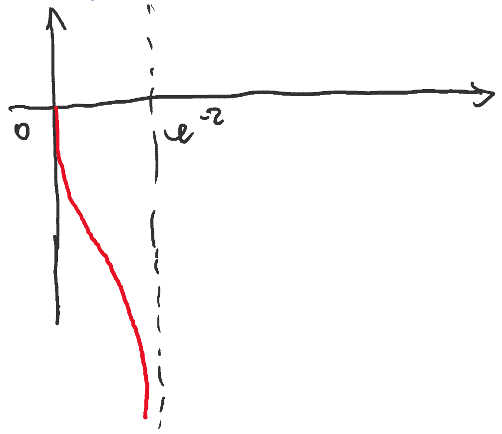
Correzione rispetto alla lezione: il limite non è finito!
Abbiamo dimostrato che il denominatore tende a 0.
Inoltre il conto precedente ci dice che

$$\lim_{x\to 0^+} x(\log x+2)^3 = \lim_{x\to 0^+} -6x = 0^-$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-\log x}{(\log x+2)^3} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

Il grafico arriva in 0 con tangente verticale!



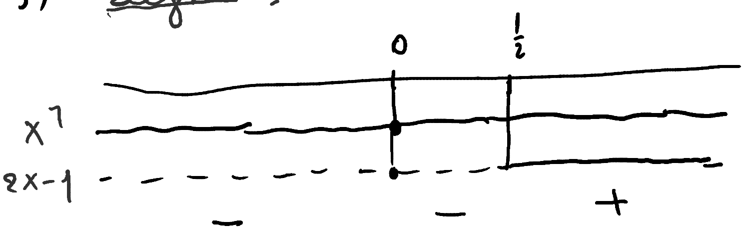
ESERCIZIO 3

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}e^{\frac{1}{x}}$$

1) Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0, \frac{1}{2}\} = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

2) no simmetrie (il dominio non è simmetrico)

3) Segno:



$f > 0$ per $x > \frac{1}{2}$

$f < 0$ per $x < 0 \lor 0 < x < \frac{1}{2}$

$f = 0$ per $x = 0$.

$(0,0)$ appartiene al grafico ed è l'unico punto di intersezione con i due assi.

4) Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} = +\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{0}{-1}\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} -x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \qquad y=\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} -\frac{e^y}{y^2} = -\infty .$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{4}}{0^-} e^2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{4}}{0^+} e^2 = +\infty .$$

- Le rette $y=0$ e $y=\frac{1}{2}$ sono asintoti verticali ($y=0$ è solo asintoto destro).
- Ci sono asintoti obliqui?

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} \Big/ x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} .$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-1}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) + \frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-1}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) + \frac{2x^2-x(2x-1)}{2(2x-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-1}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) + \frac{x}{4x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-1} \, \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{x}{4x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{2x-1}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{x}{4x-2}}_{\to\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

quindi $q = \frac{3}{4}$

La retta $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Con gli stessi conti si fa vedere che è anche asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

5) <u>Derivata</u>:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2x-1}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2x(2x-1) - x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x-1}$$

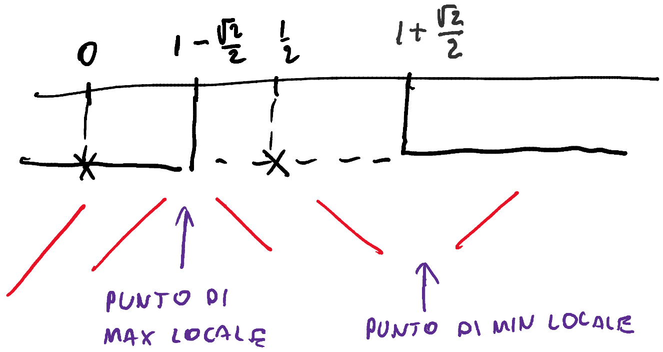
$$= e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2} - \frac{1}{(2x-1)} \right)$$

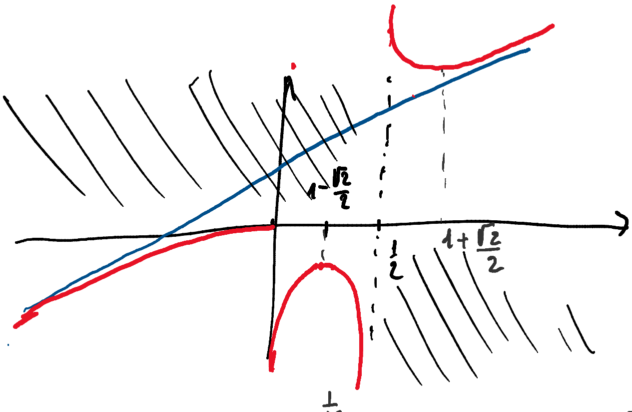
$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(2x-1)^2} \left(2x^2 - 2x - (2x-1) \right)$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(2x-1)^2} \left(2x^2 - 4x + 1 \right)$$

6) <u>Segno della derivata</u>:

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$





$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(2x-1)^2}(2x^2-4x+1) = \frac{0\cdot 1}{(-1)^2} = 0$$

Il grafico di f arriva in (0,0) con tangenza orizzontale.