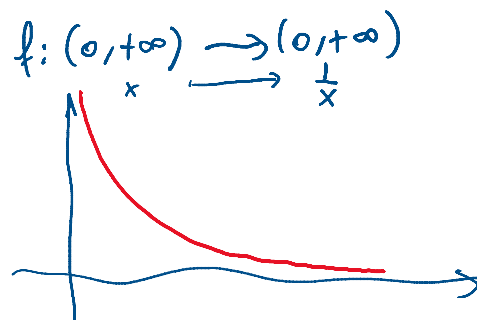
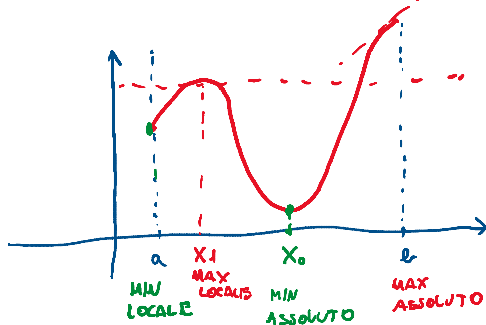


Massimi e minimi locali

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$

- x_0 è un **PUNTO DI MINIMO LOCALE** per f in X se $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in U \cap X$
- x_0 è un **PUNTO DI MASSIMO LOCALE** per f in X se $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in U \cap X$
- x_0 è un **PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO** per f in X se $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in X$
- x_0 è un **PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO** per f in X se $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in X$

OSS

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, allora il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un punto di max assoluto e di un punto di min. assoluto.

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < +\infty$. Sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale per f in (a, b) . Se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

DIM

Supponiamo x_0 punto di min locale.

$\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in U \cap (a, b)$.

cioè $f(x) \geq f(x_0)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0^+$$

« $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0^-$.

Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

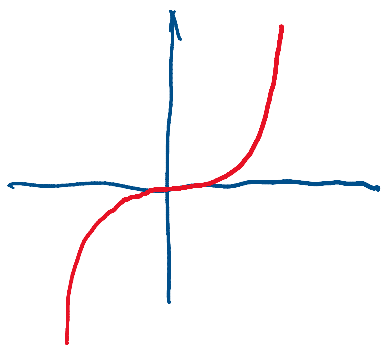
I limiti esistono perché f è derivabile in x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quindi $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$. $\square$

Attenzione:

Se $f'(x_0) = 0$ non è detto che x_0 sia un punto di max o min locale.



Ad esempio se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Quindi $f'(0) = 0$ ma 0 non è un punto di max o min locale per f in $\mathbb{R}$.

OSS

I punti di max/min locale interni al dominio sono quelli in cui la derivata cambia segno.

ESERCIZIO.

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Determiniamo i punti di max e min locale e assoluto.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$$

$$= x(4x^2 - 9x + 2)$$

$$4x^2 - 9x + 2 = 0$$

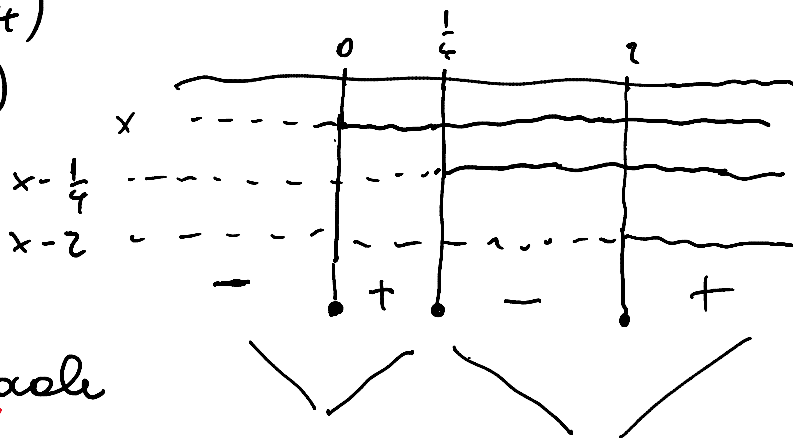
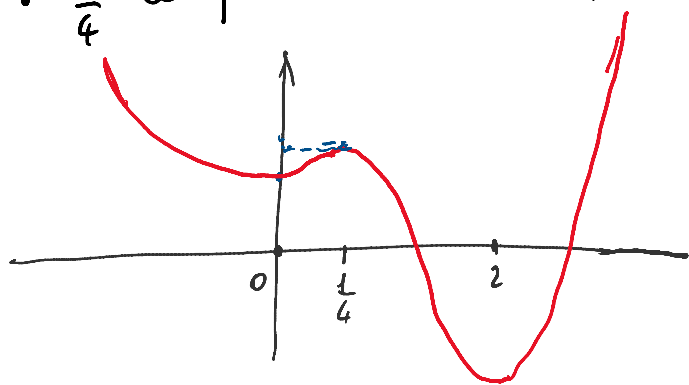
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8}$$

$\swarrow$ 2
 $\searrow$ $\frac{1}{4}$

$$f'(x) = x \cdot 4(x-2)(x-\frac{1}{4})$$

$$= 4x(x-\frac{1}{4})(x-2)$$

- 0 e 2 sono punti di min. locale
- $\frac{1}{4}$ è punto di max locale



$$f(0) = 1$$

$$f(2) = -3$$

2 è punto di min. assoluto
 $f(2) = -3$ è il min. assoluto

non esistono punti di max assoluto.

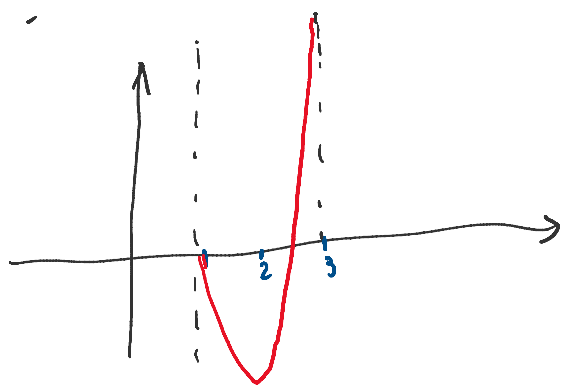
Attenzione!

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$ è un punto di max/min locale (x_0 punto di estremo locale), ci sono 3 possibilità:

- 1) $x_0 \in (a, b)$ e f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.
- 2) x_0 è un estremo di $[a, b]$ ($x_0 = a$ o $x_0 = b$)
- 3) f non è derivabile in x_0 .

ESEMPIO

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1 \quad \text{in } [1, 3]$$



$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 10$$

$x_0 = 2$ è punto di minimo locale e di min assoluto in $[1, 3]$

$x_0 = 1$ è punto di max locale (non assoluto) in $[1, 3]$

$x_0 = 3$ è punto di max assoluto in $[1, 3]$

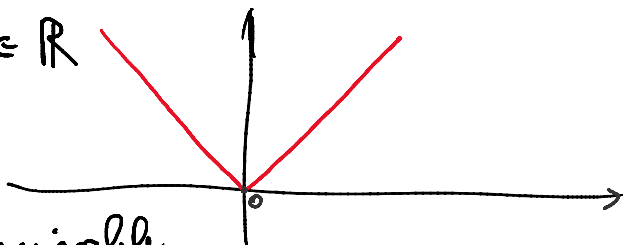
ESEMPIO

• $f(x) = |x| \quad x \in \mathbb{R}$

0 è un punto di min assoluto

ma f non è derivabile

in 0.



TEOREMA DI ROLLE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Assumiamo che f sia continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists c \in (a, b)$

tale che $f'(c) = 0$.

DIM

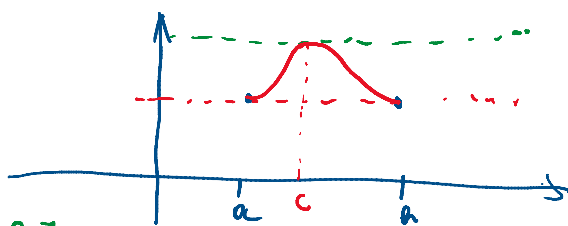
• Per il teorema di

Weierstrass $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$

talché x_1 è punto di max assoluto per f in $[a, b]$ e x_2 è punto di min assoluto in $[a, b]$.

Ci sono due possibilità:

1) $f(x_1) = f(x_2)$: Allora f è costante e quindi $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Basta scegliere c come



un qualsiasi punto di (a, b) .

$$2) f(x_1) \neq f(x_2).$$

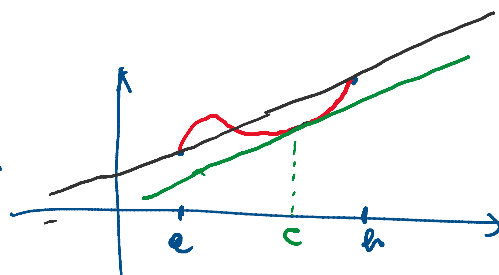
$$\text{Siccome } f(a) = f(b)$$

almeno uno tra x_1 e x_2 appartiene ad (a, b) . Per il teorema di Fermat, in questo punto f' è 0. $\square$

TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$
 $a < b$. Supponiamo f continua
in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



DIM

$$\text{Sia } h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)$$

h è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Inoltre

$$h(a) = f(a) - (0 + f(a)) = 0$$

$$h(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) + f(a) \right) = 0$$

Allora per il teorema di Rolle $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$h'(c) = 0.$$

$$\text{Ma } h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$\text{Allora } h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \checkmark$$

OSS

Dal teorema di Lagrange si ricava il criterio di monotonia:

$$f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(b-a)}_{> 0} \geq 0$$

TEOREMA DI CAUCHY

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Supponiamo f e g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) . Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c).$$

Nota: Se $g(x) = x$ allora

$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$ e ritroviamo il teorema di Lagrange.

Nota 2: Se $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ allora si può scrivere che $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

DIM

Sia $h(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$.

Sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi:

$\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$. Ma

$$\begin{aligned} h(b) &= (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) \\ &= \cancel{f(b)g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)f(b)} + g(a)f(b) \\ &= -f(a)g(b) + g(a)f(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) \\ &= f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - \cancel{g(b)f(a)} + \cancel{g(a)f(a)} \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a). \end{aligned}$$

$$= h(b)$$

Quindi: $h'(c) = 0$ e

$$h'(x) = (f(h) - f(a))g'(x) - (g(h) - g(a))f'(x)$$

$$\text{Quindi: } (f(h) - f(a))g'(c) - (g(h) - g(a))f'(c) = 0$$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$,

Assumiamo che f e g siano derivabili in (a, b) e:

$$1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

$$2) g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

$$3) \exists \text{ il limite } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Allora } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

$$\left(\text{cioè } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

• Nota 1: Il teorema vale anche per i limiti per $x \rightarrow b^-$ o per $x \rightarrow x_0$ con $x_0 \in (a, b)$.

• Nota 2:

Il teorema vale anche se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm \infty.$$

Idea della dimostrazione:

Assumiamo per semplicità f, g continue in $[a, b]$.

$$\text{con } f(a) = g(a) = 0.$$

Possiamo applicare il teorema di Cauchy: $\forall x \in [a, b]$.

$$\exists c(x) \in (a, x) \text{ t.c. } \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - \underbrace{f(a)}_{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \quad \text{e} \quad c(x) \in (a, x) \text{ quindi} \\ \text{se } x \rightarrow a^+ \text{ allora } c(x) \rightarrow a^+ \\ y = c(x) \\ = \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l.$$

ESEMPLI

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 5}$ f.i. $\frac{0}{0}$

?
= $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{3x^2 + 4} = \frac{2}{7}$
OK

2) Il teorema si può usare per verificare tutti i limiti materiali:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$ OK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ OK

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x - \sqrt{x}} \stackrel{?(D.L.H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} / \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{\rightarrow 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ f.i. $0 \cdot (-\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$ $\log x \rightarrow -\infty$ $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{? \text{ D.L.H. }}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} &= \frac{d}{dx} x^{-1} \\ &= -x^{-1-1} = -x^{-2} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 &= 2x^{2-1} & 2 &= -1 \\ \frac{d}{dx} x^{-1} &= -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{1}{x^2} \end{aligned} \right]$$

Attenzione:

Se $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \nexists$ non si può applicare il teorema e
NON si può dire che $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \nexists$

ESEMPIO

$$f(x) = x + \sin x$$

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \stackrel{? \text{ D.L.H. }}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \cos x \nexists$$

NO

Devo trovare un altro metodo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1$$

Attenzione 2:

Il teorema si applica solo alle forme indeterminate

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$$

Non posso applicare il teorema perché non è una forma indeterminata.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{1} = \cos \pi = -1$$

Applicazione allo studio di punti di non derivabilità

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, f continua in x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(\text{D.L.H.})?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(? \text{ D.L.H.})}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x).$$

ESEMPIO

$$f(x) = \log(1 - |2x - 1|) = \begin{cases} \log(2 - 2x) & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ \log(2x) & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-2x} \cdot (-2) & \text{se } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x} \cdot 2 & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f'_+(\tfrac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{1}{x-1} = -2$$

$$f'_-(\tfrac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

f non è derivabile in $x_0 = \frac{1}{2}$.

