Lezione 18

lunedì 15 novembre 2021 09:02

Riepilogo

- Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in X \cap D(X)$ si dice che f è derivabile in x_0 se $\exists$ finito il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}$

- $\frac{d}{dx} c = 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$ (dove la derivata è ben definita)
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

OPERAZIONI TRA DERIVATE

- Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X \cap D(X)$.
Assumiamo che f e g siano derivabili in x_0. Allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2) Se $c \in \mathbb{R}$, allora cf è derivabile in x_0 e $(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$
3) fg è derivabile in x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$
4) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

DIM (solo di 1) e 3))

1) $(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x) - (f(x_0)+g(x_0))}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

3) $$(f\,g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

ESEMPI

- $$\frac{d}{dx} 2x + e^x = 2 + e^x$$

- $$\frac{d}{dx} x \sin x = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$$

- $$\frac{d}{dx} \frac{3x^2 - 1}{4x^5 + 1} = \frac{6x(4x^5 + 1) - (3x^2 - 1)(20x^4)}{(4x^5 + 1)^2} = \frac{24x^6 + 6x - 60x^6 + 20x^4}{(4x^5 + 1)^2} = \frac{-36x^6 + 20x^4 + 6x}{(4x^5 + 1)^2}$$

- $$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{cases}$$

PROPOSIZIONE (DERIVATA DI FUNZIONI COMPOSTE)

Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in X \cap D(X)$ t.c. $f(x_0) \in D(Y)$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$

ESEMPI

1) $\frac{d}{dx} e^{x^2}$

$= e^{x^2} \cdot 2x = 2x\, e^{x^2}$

$$\boxed{e^{x^2} = g(f(x)) \text{ dove } \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = e^x \end{array}}$$

2) $\frac{d}{dx} \sqrt{1+\sin x} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}} (1+\sin x)'$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}} (\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

3) $\frac{d}{dx} \sqrt[3]{4x^2 - x + 1} =$

$= \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(4x^2-x+1)^2}} \cdot (8x - 1)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

4) $\frac{d}{dx} \underline{a^x} = \frac{d}{dx} e^{\log a^x}$ $(a > 0)$

$= \frac{d}{dx} \underline{e^{x \log a}}$

$= e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$

PROPOSIZIONE (DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA)

- Sia $f: I \to Y$ una funzione biettiva con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Sia $f^{-1}: Y \to I$ la funzione inversa di f. Se f^{-1} è derivabile in in $f(x_0)$ e $(f^{-1})'(f(x_0)) \neq 0$, allora f è derivabile in x_0 e

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))}.$$

ESEMPI

- $f(x) = \log x$ $\qquad f^{-1}(x) = e^{x}$

$$(f^{-1})'(x) = e^{x}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

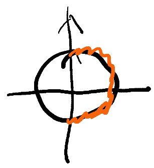
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$

$$(f^{-1})'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

- $f(x) = \arcsin x$ $\qquad f^{-1}(x) = \sin x \quad , x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Nota
$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$
$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $f(x) = \arccos x$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

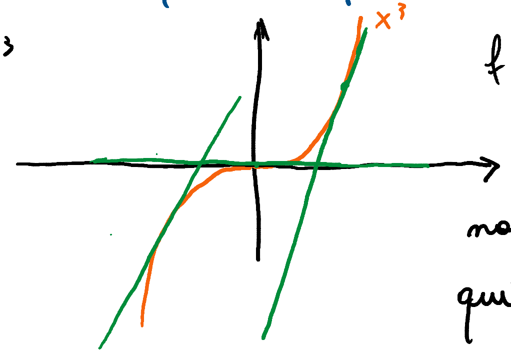
TEOREMA (CRITERIO DIFFERENZIALE DI MONOTONIA)

- Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Supponiamo che f sia derivabile in I (cioè in tutti i punti di I). Allora:

1) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ è monotona crescente in I
2) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ è motona decrescente in I.
3) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è strettamente crescente in I
4) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è strettamente decrescente in I.

Attenzione! 3) e 4) non sono equivalenze, cioè $\exists$ funzioni strettamente monotone la cui derivata si annulla in qualche punto

$f(x) = x^3$



f è strettamente crescente in x_0

ma $f'(x) = 3x^2$

quindi $f'(0) = 0$.

ESERCIZIO

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Studiamo il comportamento della funzione e e disegnamone il grafico.

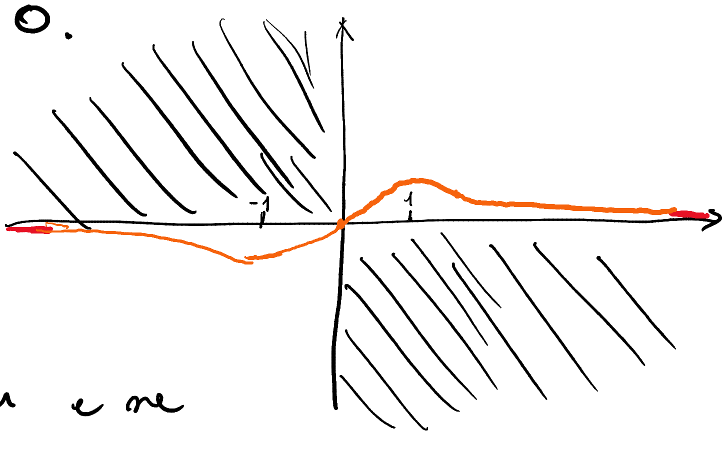
- $Dom(f) = \mathbb{R}$ $\quad (x^2+1>0)$
- $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$

  f è dispari.

- $f(x) \geq 0 \iff \frac{x}{x^2+1} \geq 0 \iff x \geq 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(1+\frac{1}{x^2})}$

  $= \frac{1}{+\infty \cdot 1} = 0.$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

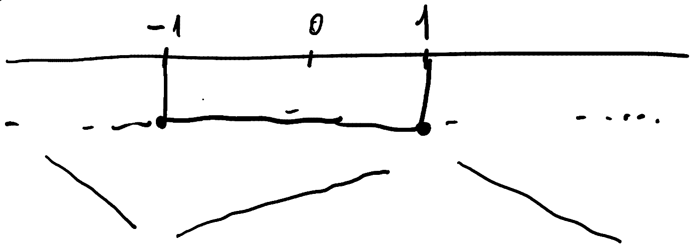


- $f(0) = 0$
- Calcoliamo la derivata e ne studiamo il segno.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{1\cdot(1+x^2)-2x\cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff 1-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1$$
$$\iff -1 \leq x \leq 1$$

$$f'(x) = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff x = \pm 1$$



Notiamo che $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$ e $f(1) = \frac{1}{2}$

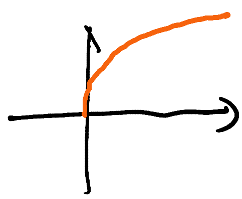
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Def Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X \cap D(X)$. Si dice che x_0 è un PUNTO A TANGENTE VERTICALE (o che il punto $(x_0, f(x_0))$ è un PUNTO SUL GRAFICO A TANGENTE VERTICALE) se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$$

ESEMPI

- $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ Dom$(f) = [0,+\infty)$

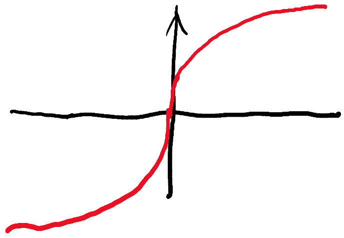


$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ in $x_0 = 0$ c'è un punto a tangenza verticale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} =$$

$$-\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty .$$



Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e sia x_0 un punto interno ad I (cioè $x_0 \in I$ e x_0 non è uno degli estremi di I)

- Se il limite
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
esiste finito, si dice che f AMMETTE DERIVATA DESTRA e il valore del limite si dice DERIVATA DESTRA di f in x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$

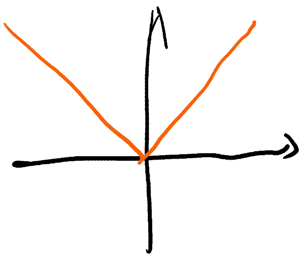
- Se esiste finito $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ diremo che f AMMETTE DERIVATA SINISTRA in x_0 e il valore del limite si dice DERIVATA SINISTRA di f in x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$ $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e sia x_0 interno ad I. Si dice che x_0 è un PUNTO ANGOLOSO per f (o che $(x_0, f(x_0))$ è un PUNTO ANGOLOSO SUL GRAFICO DI f) se $\exists$ $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.

ESEMPIO

$f(x) = |x|$

$f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$

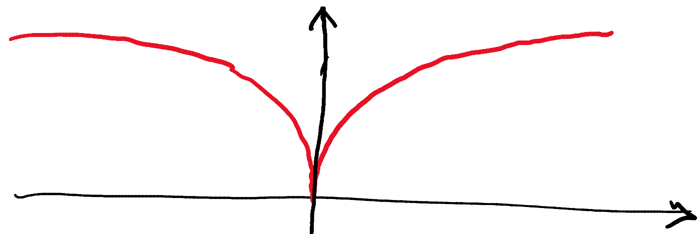


Def: Sia $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subset \mathbb{R}$ intervallo e sia $x_0 \in I$ un punto interno ad I. Si dice che il grafico di f ha una CUSPIDE in x_0 se

$$\lim_{x_0 \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty .$$



ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{|x|}$

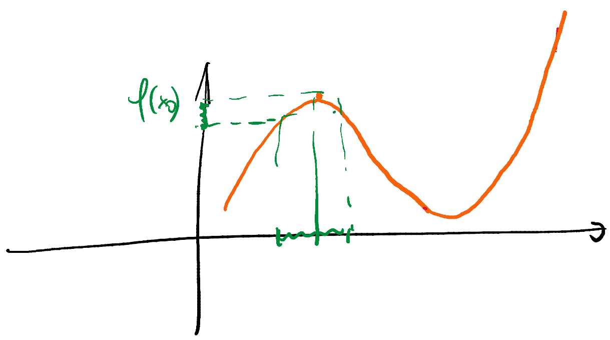
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} - \frac{\sqrt{-x}}{-x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} - \frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty .$$

Quindi il grafico di f ha una cuspide in $x_0 = 0$.

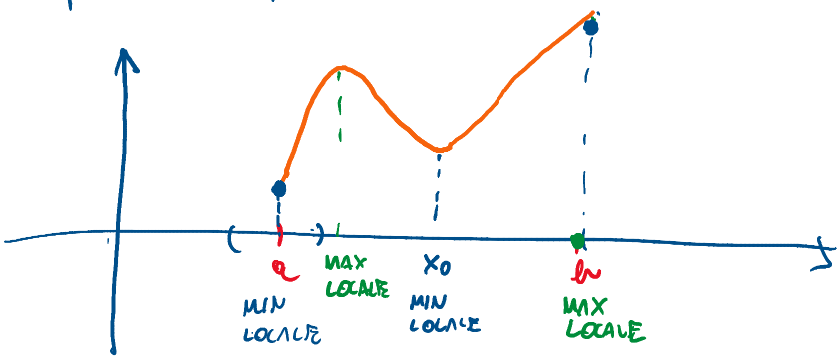
MASSIMI E MINIMI LOCALI PER UNA FUNZIONE



Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO LOCALE se per f se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x$ in un intorno U di x_0. (cioè se $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U \cap X$).

- Si dice che x_0 è PUNTO DI MINIMO LOCALE per f in X se $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U \cap X$.



Def. Sia $f: X \to \mathbb{R}$ $X \subset \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$.

- Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO per f in X se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in X$

$$f(x_0) = \max_X f = \max f(X).$$

- Si dice che x_0 è un PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO per f in X se $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in X$.

OSS

Se x_0 è un punto di massimo (o di minimo) assoluto, allora x_0 è anche un punto di massimo (o di minimo) locale.