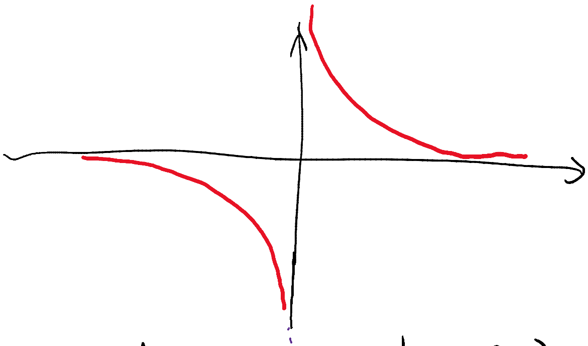
LEZIONE 17

giovedì 11 novembre 2021 09:05

Asintoti di funzione

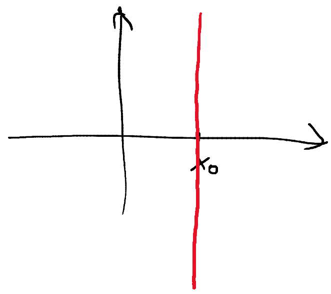
$f(x) = \frac{1}{x}$



Equazione di una retta (non verticale)

$y = mx + q$, $m, q \in \mathbb{R}$

Equazioni delle rette verticali: $x = x_0$



Def: Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D(X)$. Si dice che la retta $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE in x_0 se

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

Nota: Nel primo caso si dice che $x = x_0$ è un asintoto verticale da destra

Nel secondo - - - - da sinistra.

ESEMPIO

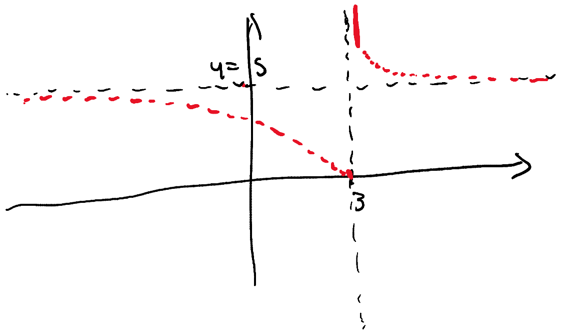
$f(x) = 5^{\frac{x}{x-3}}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$\lim_{x \to 3^+} 5^{\frac{x}{x-3}} \xrightarrow{\frac{x}{x-3} \to +\infty} = \lim_{y \to +\infty} 5^y = +\infty$

$\lim_{x \to 3^-} 5^{\frac{x}{x-3}} \xrightarrow{\frac{x}{x-3} \to -\infty} = \lim_{y \to -\infty} 5^y = 0.$

La retta $x = 3$ è un asintoto verticale da destra



Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$ tale che $+\infty \in D(X)$. Si dice che la retta $y = y_0$ con $y_0 \in \mathbb{R}$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per f per $x \to +\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$.

In modo simile se $-\infty \in D(X)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = y_0$ diremo che la retta $y = y_0$ è ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \to -\infty$.

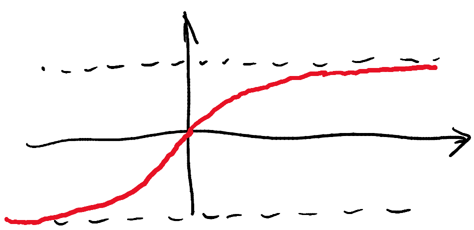
ES

$f(x) = \frac{1}{x}$ la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

- $f(x) = 5^{\frac{x}{x-3}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$.

La retta $y = 5$ è asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

La retta $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

e $y = -\frac{\pi}{2}$ è " " per $x \to -\infty$.

- $f(x) = 5^x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\qquad y=0$ è asint. orizz. per $x\to+\infty$

ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ no asint. orizz. per $x\to+\infty$.

Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ e $+\infty \in D(X)$. Dati $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ diremo che la retta $y = mx+q$ è un ASINTOTO OBLIQUO per $x\to+\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+q) = 0.$$

OSS

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $y = mx+q$ è asintoto obliquo.

2) $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$.

Idea

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+q) = 0$$

allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(mx+q) + mx+q}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(mx+q)}{x} + m + \frac{q}{x} = m,$$

e $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+q) + q = q.$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{3x^2+1}$ $\qquad$ $Dom(f) = \mathbb{R}.$

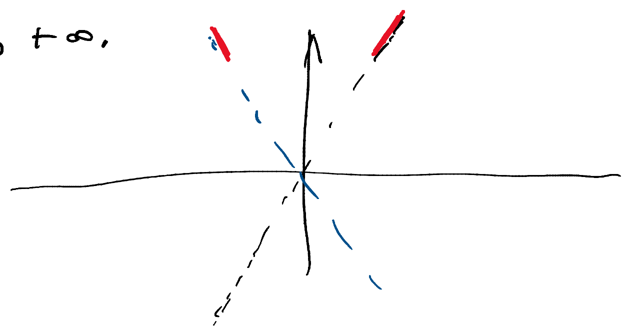
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{no asintoti oriz.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{3} \quad {}^{= m}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3}\,x\right) \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}\,x}$$

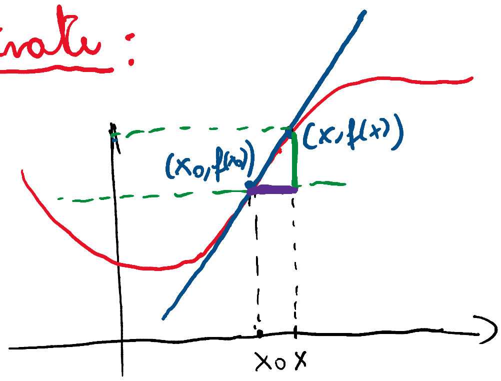
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{3x^2}+1-\cancel{3x^2}}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}\,x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Possiamo dire che la retta $y=\sqrt{3}\,x$ è asintoto obl. per $x\to+\infty$.



Si può dare la definizione di asintoto a $-\infty$.
$y=-\sqrt{3}\,x$ è asintoto obl. per $x\to-\infty$.

Derivate:



La retta che passa per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ avrà equazione $y = mx + q$.

$$\begin{cases} f(x_0) = m x_0 + q \\ f(x) = m x + q \end{cases}$$

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Def La quantità $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si dice RAPPORTO INCREMENTALE DI F IN x_0 CON INCREMENTO $x - x_0$.

Per sapere se la funzione cresce o decresce vicino a x_0 dobbiamo calcolare $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Def: Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D(X)$. Si dice che f è DERIVABILE IN x_0 se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tale limite si dice DERIVATA di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

OSS Se $h = x - x_0$ allora $x = x_0 + h$ e possiamo scrivere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Molto spesso il punto in cui calcoliamo la derivata lo indicheremo con x e scriveremo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

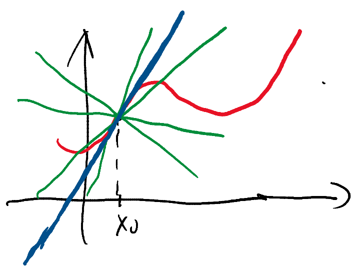
Notazioni alternative

La derivata si può indicare come:

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}, \quad \dot{f}(x), \quad f^{(1)}(x), \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

Def: Si definisce retta tangente al grafico di f in x_0 la retta di equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



PROPOSIZIONE

La retta tangente è l'unica retta di equazione del tipo $y = mx + q$ che soddisfa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (mx+q)}{x - x_0} = 0. \qquad \left(\begin{array}{l} m = f'(x_0) \\ q = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \end{array} \right)$$

OSS

Se f è derivabile in un punto $x_0 \in D(X) \cap X$ allora f è continua in x_0.

DIM

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) + f(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + f(x_0) = f(x_0).$$

Derivate di funzioni elementari

- $f(x) = c$ (funzione costante).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

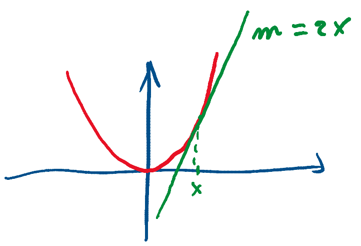
- $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x}+h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

- $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$



Quindi $f'(x) = 2x$

- $f(x) = x^{\alpha}$ prendiamo $x > 0$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right)}{h} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$= x^\alpha \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}\cdot x} = x^{\alpha-1}\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

Quindi si ha

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

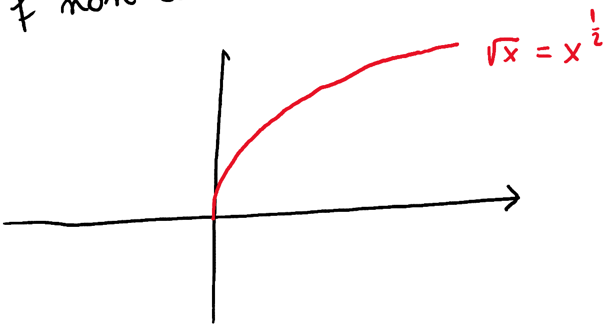
Domanda: Si può prendere $x=0$?

Se $\alpha > 0$, $0 \in Dom(f)$ e possiamo provare a calcolare la derivata in $x=0$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^\alpha - 0^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

Però, se $0<\alpha<1$, $\lim_{h\to 0^+} h^{\alpha-1} = +\infty$. In al caso f non è derivabile.

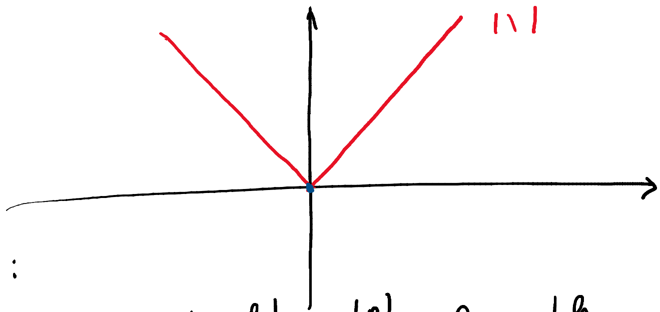


Vediamo che la retta tangente in 0 è verticale.

Possiamo dire quindi che la funzione $f(x)$ x^α è derivabile in 0 se $\alpha > 1$. e non è derivabile in 0 se $0<\alpha<1$

Altro esempio di funzione non derivabile.

$f(x) = |x|$



In questo caso:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

mentre

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

Dunque $\nexists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ e f non è derivabile in $x = 0$.

E negli altri punti?

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

si può scrivere anche $(e^x)' = e^x$ o

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$f(x) = \sin x$$

Per calcolare la derivata ci serve la formula di addizione:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

Allora:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} \cdot h + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

· In modo simile si prova che la derivata di $f(x) = \cos x$ è $f'(x) = -\sin x$

Infatti la formula di addizione per il coseno è

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

Dunque:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}$$

$$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$