LEZIONE 16

mercoledì 10 novembre 2021 09:03

Funzioni continue

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.

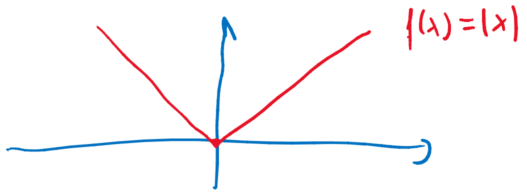
f è continua in x_0 se $x_0 \in D(X)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

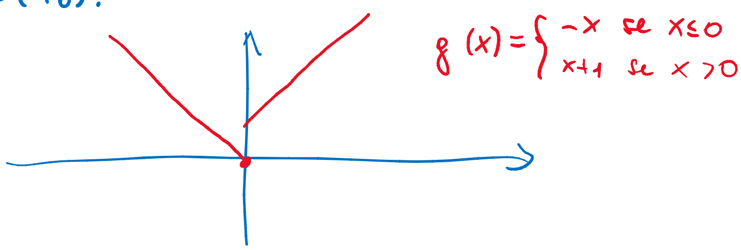
oppure se $x_0 \notin D(X)$.

OSS

Per stabilire se f è continua in x_0 basta conoscere i valori di f in un intorno di x_0.

Non basta conoscere solo $f(x_0)$.





f è continua in $x_0 = 0$

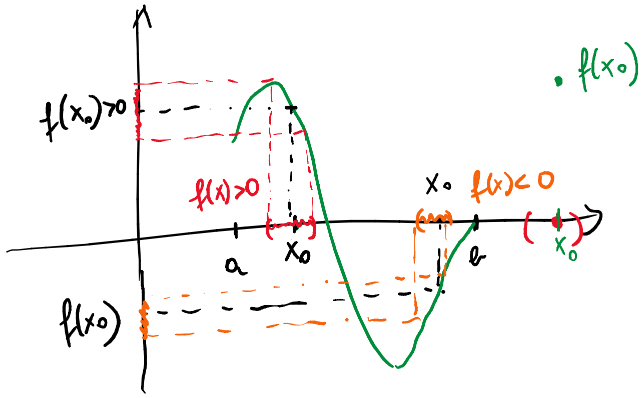
però $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

g non è continua in $x_0 = 0$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (PER FUNZIONI CONTINUE)

Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ tali che f è continua in x_0. Se $f(x_0) \neq 0$

allora $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$ $\forall x \in U \cap X$.



DIM

Ci sono due possibilità:

1) $x_0 \in D(X)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

in questo caso la conclusione segue dal teorema della permanenza del segno per i limiti

2) $x_0 \notin D(X)$. Allora $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che $U \cap X = \{x_0\}$. Quindi

$$\forall\, x \in U \cap X \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0)$$

TEOREMA (OPERAZIONI TRA FUNZIONI CONTINUE)

Siano $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Se f e g sono continue in x_0 allora:

1) $f+g$ è continua in x_0
2) cf è continua in x_0 $\forall\, c \in \mathbb{R}$.
3) fg è continua in x_0
4) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0

ESEMPI

- $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4+1}$ è continua in x_0 $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$. perché $x_0^4 + 1 \neq 0$ $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x^4-1}$

$$4x^4 = 1 \iff 2x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{2}$$
$$\iff |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Altro modo:

$$4x^4 - 1 = (2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = \left((\sqrt{2}x)^2 - 1\right)(2x^2 + 1)$$

$$= (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)(2x^2 + 1)$$

$$4x^4 - 1 = 0 \iff \sqrt{2}x + 1 = 0 \ \vee \ \sqrt{2}x - 1 = 0 \ \vee \ 2x^2 + 1 = 0$$

$$\iff x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ \vee \ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\dfrac{2x+3}{4x^4 - 1}$ è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE)

Siano $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ con $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$.
Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$
allora $g \circ f$ è continua in x_0.

ESEMPI

$f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ $\qquad (5 - 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{2})$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, \frac{5}{2}]$

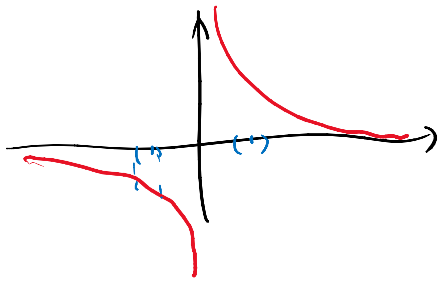
Possiamo vedere f come una composizione $f = f_2 \circ f_1$

$f_1 : (-\infty, \frac{5}{2}] \longrightarrow [0, +\infty)$, $x \longmapsto 5 - 2x$ $\qquad f_2 : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

Dato che f_1 è continua in tutti i punti di $(-\infty, \frac{5}{2}]$
e f_2 è continua in tutti i punti di $[0, +\infty)$
allora f è continua in $(-\infty, \frac{5}{2}]$

Def: Se $f: X \to \mathbb{R}$ è continua in tutti i punti di di un insieme $A \subseteq X$ si dice che f è continua in A.

- $f(x) = \sqrt{5-2x}$ è continua in $(-\infty, \frac{5}{2}]$
- $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4+1}$ è continua in $\mathbb{R}$
- $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x^4-1}$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

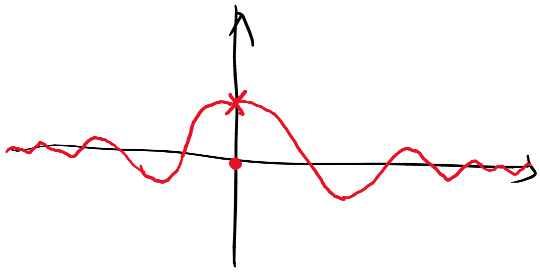
Classificazione dei punti di discontinuità.

Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione, $X \subseteq \mathbb{R}$.
Diremo che $x_0 \in X$, si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ per f se f non è continua in x_0

Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. Si dice che x_0 è un punto di DISCONTINUITÀ ELIMINABILE se $x_0 \in D(X)$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



f ha una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$.

Invece:

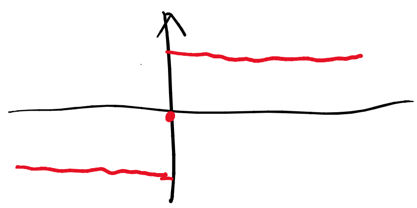
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = 0$. $\left(\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \right)$

Def Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X \cap D^+(X) \cap D^-(X)$.
Si dice che x_0 è un punto di DISCONTINUITÀ DI SALTO (o DI PRIMA SPECIE) se esistono finiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
In tal caso la quantità $\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ si dice SALTO di f in x_0.

ESEMPI

- $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -1$

C'è una discontinuità di tipo salto in x_0 e il salto di f in x_0 è 2.

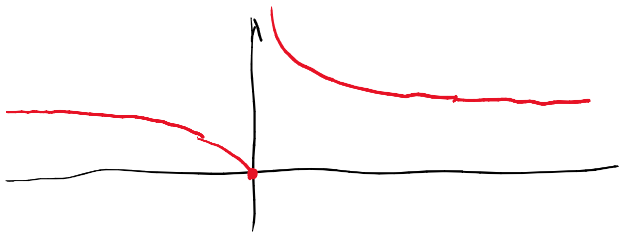
Def: Si dice che x_0 è un punto di discontinuità di SECONDA SPECIE se x_0 è di discontinuità e non è eliminabile né di salto.

ES

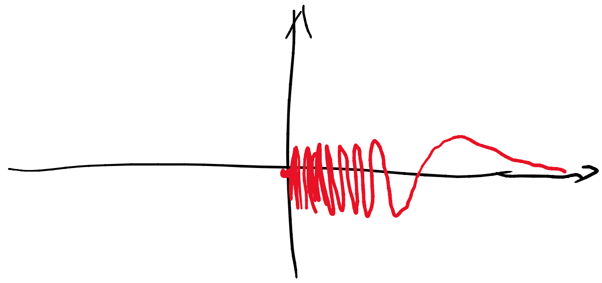
$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = 0$$

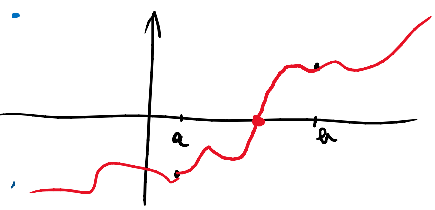


- $$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

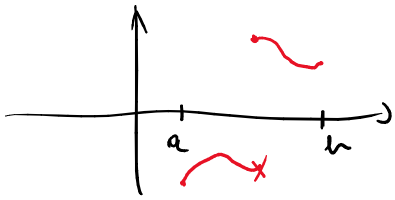


TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, f continua in X.
Siano $a, b \in X$ tali che $a < b$, $[a,b] \subseteq X$
e $f(a) f(b) < 0$. Allora
$\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.



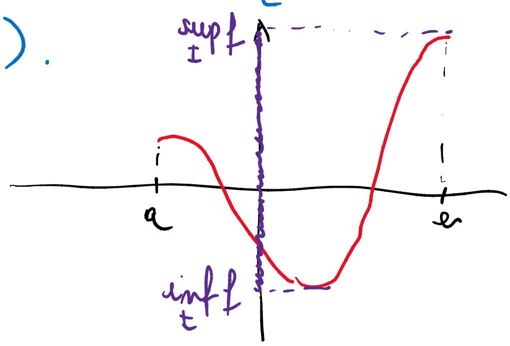
OSS
Il risultato non vale per funzioni non continue



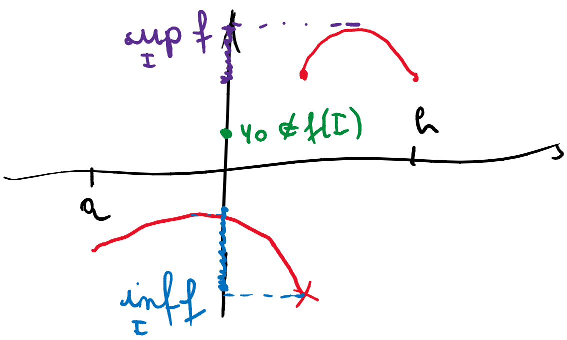
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e f continua in I. Allora f assume tutti i valori strettamente compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.

Cioè $(\inf_I f, \sup_I f) \subseteq f(I)$.



Questa proprietà non vale per le funzioni discontinue



OSS Se f è continua in un intervallo I, allora

$(\inf_I f, \sup_I f) \subseteq f(I) \subseteq [\inf_I f, \sup_I f]$

In particolare, $f(I)$ è un intervallo.

TEOREMA DI WEIRSTRASS

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$, allora:

1) $\exists \max_{[a,b]} f = \max f([a,b])$ e $\exists \min_{[a,b]} f = \min f(I)$

2) $f([a,b]) = [\min_{[a,b]} f \ , \ \max_{[a,b]} f]$

Ricordiamo

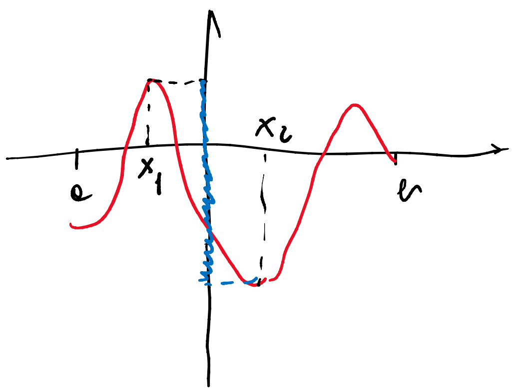
Dato un insieme A, A limitato, allora $\exists \inf A$ e $\sup A$.
(esistono anche se A non è limitato ma possono valere $+\infty$ o $-\infty$)
però non è detto che esistano $\max A$ e $\min A$.

Di conseguenza date $f: X \to \mathbb{R}$, possiamo definire sempre $\sup_A f$ e $\inf_A f$ $\left(\sup_A f = \sup f(A) \text{ e } \inf_A f = \inf f(A) \right)$ $\forall A \subseteq X$.

Invece, non è detto che esistano $\max_A f$ e $\min_A f$.

Oss

- Il teorema di Weierstrass ci dice varie cose:
  1) f è limitata ($f([a,b])$ è un insieme limitato)
  2) $\exists \ x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che
  $$f(x_1) = \max_{[a,b]} f$$
  $$f(x_2) = \min_{[a,b]} f$$
  3) $f([a,b])$ è un intervallo chiuso e limitato.

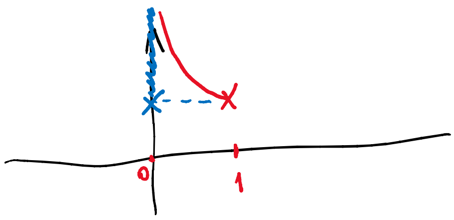


OSS

- Il teorema non è vero per funzioni continue su intervalli che non sono chiusi

ESEMPI

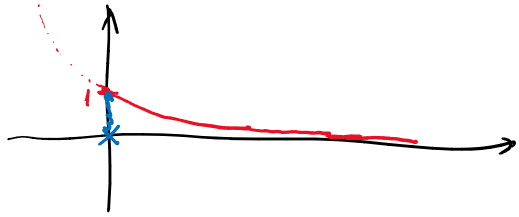
$f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0,1)$



$f((0,1)) = (1,+\infty)$
non è limitato
non ha un massimo
né un minimo.

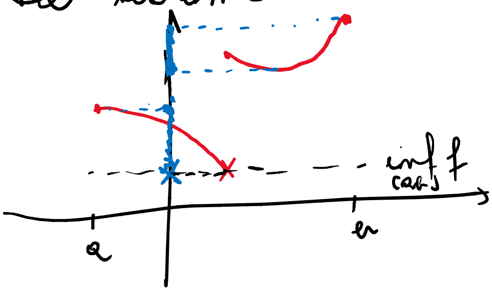
- Il teorema non vale per intervalli non limitati

$$f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{-x}$$



$f([0,+\infty)) = (0,1]$
questo intervallo non ha un minimo.

- Il teorema non vale per funzioni non continue



f non ha minimo nell'intervallo $[a,b]$.

Osservazioni sul teorema degli zeri.

Il teorema degli zeri si può usare per dimostrare che esistono soluzioni di equazioni difficili da risolvere.

ESEMPIO

$x = e^{-x}$ esistono soluzioni?

$\log x = -x$ come si risolve?

Non si riesce a risolvere esplicitamente

$x = e^{-x} \iff x - e^{-x} = 0$

Chiamiamo $f(x) = x - e^{-x}$

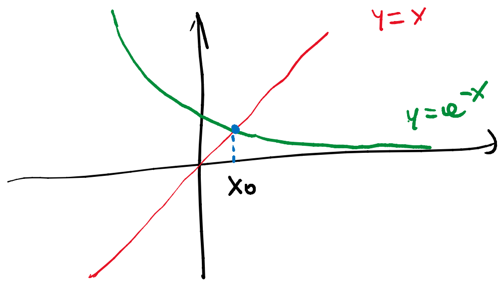
$f(0) = 0 - e^0 = -1$

$f(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} > 0$

Inoltre f è continua quindi il teorema degli zeri garantisce l'esistenza di un punto x_0 tale che

$f(x_0) = 0 \iff x_0 = e^{-x_0}$

Quindi esiste una soluzione nell'intervallo $(0,1)$



Possiamo vedere x_0 come l'ascissa del punto di intersezione tra i grafici di x e e^{-x}.

TEOREMA DEGLI ZERI GENERALIZZATO.

Siano $f, g: X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}$. Assumiamo che f e g siano continue in X. Siano $a, b \in X$ tali che $[a,b] \subseteq X$, $a < b$ e $(f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) < 0$.

Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0)$.

DIM

Basta applicare il teorema degli zeri a $h(x) = f(x) - g(x)$.

h è continua e per ipotesi $h(a)\,h(b) < 0$.

Il teorema degli zeri dice che $\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c. $h(x_0) = 0$ cioè $f(x_0) = g(x_0)$.