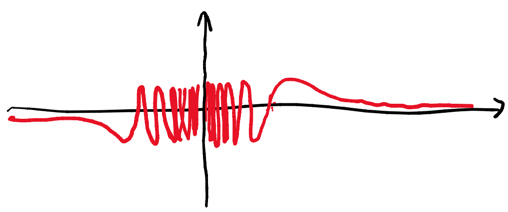
MATEMATICA - LEZIONE 15

lunedì 8 novembre 2021 11:02

- Non sempre $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ in questo caso il limite non esiste
- Può anche succedere che $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ non siano definiti.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

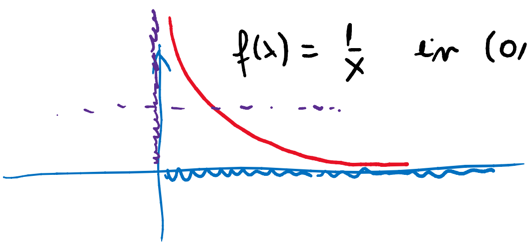


in questo caso $\lim_{x \to x_0^-} \sin \frac{1}{x} \;\nexists$

TEOREMA (ESISTENZA DEI LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE)

Sia I un intervallo con $a = \inf I$ e $b = \sup I$ (si noti che $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Sia $f: I \longrightarrow Y$ con $Y \subseteq \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$. Inoltre:

1) Se f è crescente $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_I f$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_I f$
2) Se f è decrescente, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_I f$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_I f$



$f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$ si ha $f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$ e

$$\sup_I f = +\infty \qquad \inf_I f = 0$$

$\frac{1}{x}$ è monotona decrescente e quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \sup_I f = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf_I f = 0$$

Osservazione sui limiti di funzioni composte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad e \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$$

È importante che esistono entrambi i limiti.

Se $\lim_{y \to y_0} g(y) \nexists$ non sempre si può concludere che $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \nexists$

- $g(y) = \frac{1}{y}$ e $f(x) = 3x^2$

$$g(f(x)) = \frac{1}{3x^2} \qquad \lim_{x \to 0} g(f(x)) = +\infty$$

però $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$$

ma

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \nexists$$

La cosa giusta da fare è osservare che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0^+ \quad e \quad \lim_{y \to y_0^+} g(y) = +\infty$$

con questa osservazione facciamo tornare le regole della composizione.

Def: Siano $f, g : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(X)$.

Si dice che f e g sono ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI per $x \to x_0$ (e si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$) se:

1) $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$
2) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

ESEMPIO

$f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 2x$ $\qquad x_0 = +\infty$

$g(x) = x^2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}+2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{x} = 1$$

f e g sono asintoticamente equivalenti per $x \to +\infty$

$x^2 + \sqrt{x} + 2x \sim x^2$ per $x \to +\infty$.

- $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 2x$ $\qquad$ per $x \to 0^+$

$$f(x) = \sqrt{x}\,(\underbrace{x^{\frac{3}{2}} + 1 + 2\sqrt{x}}_{\to 1 \text{ per } x \to 0^+})$$

quindi $f(x) \sim \sqrt{x}$ per $x \to 0$.

OSSERVAZIONE

Siano f, g, h tre funzioni. Se $f \sim g$ per $x \to x_0$ e $\lim_{x\to x_0} h(x) f(x) = \ell$ allora $\lim_{x\to x_0} h(x) g(x) = \ell$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{\operatorname{sen} x}$$

Sappiamo che $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

quindi $\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

e $\frac{1}{\operatorname{sen} x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x^2+x^3}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+x} = 1$$

DIMOSTRAZIONE DELL' OSSERVAZIONE

Per ipotesi: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to x_0} h(x) f(x) = \ell$. Allora

$$\lim_{x\to x_0} h(x)\,g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)\,f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\,g(x)$$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{h(x)\,f(x)}_{\to \ell}\cdot\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \ell\cdot\frac{1}{1} = \ell$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$$

Attenzione! Non vale per le somme

Se $f \sim g$ e $\lim_{x\to x_0} f(x)+h(x) = \ell$ non posso concludere che $\lim_{x\to x_0} g(x)+h(x) = \ell$.

ESEMPIO

$f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^3}{x+1}$, $x_0 = +\infty$

$h(x) = \frac{1}{x} - x^2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + h(x) = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x^2} + \frac{1}{x} - \cancel{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) + h(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3}{x+1} + \frac{1}{x} - x^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x^2}{x+1} + \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{-x^2}{x+1}}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = -\infty$$

Però $f(x) \sim g(x)$ per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\frac{x^3}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x+1}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

Limiti di successioni

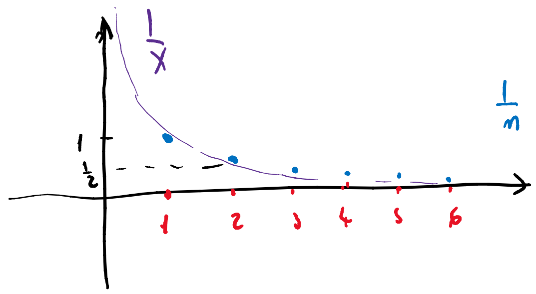
Le successioni sono funzioni il cui dominio è $\mathbb{N}$ (oppure $\mathbb{N}\setminus A$ con A insieme finito) e il cui codominio è $\mathbb{R}$.

$$a: \mathbb{N}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{1}{n}$$

Si usa una notazione abbreviata:
Si scrive a_n invece di $a(n)$

La successione si indica con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$
(oppure $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$)

- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ è la successione di prima.



Di una successione si può fare solo il limite per $n \to +\infty$.

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+1} - 2n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right)\cdot\left(\sqrt{4n^2+1} + 2n\right)}{\sqrt{4n^2+1} + 2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{4n^2} + 1 - \cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2+1} + 2n} = 0$$

• $a_n = (-1)^n$

$\lim_{n \to +\infty} a_n$ il limite $\nexists$

• $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Funzioni continue

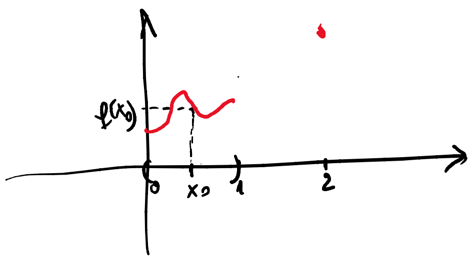
Def: Sia $f : X \to Y$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$.
Si dice che f è CONTINUA in x_0 se

$x_0 \in D(X)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

oppure
$x_0 \notin D(X)$. (nel secondo caso, si dice x_0 è un PUNTO ISOLATO)

$X = (0,1) \cup \{2\}$

punto isolato



• OSSERVAZIONI

1) Si può dire se f è continua solo se $x_0 \in X$

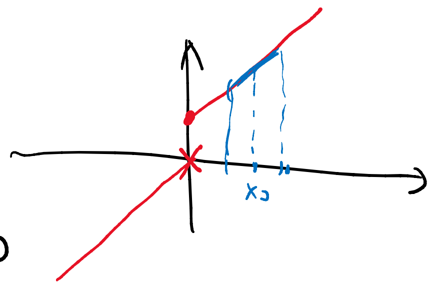
2) f è continua in x_0 $\iff$ $\forall\, V$ intorno di $f(x_0)$ $\exists$ U intorno di x_0 tale che $f(x) \in V$ $\forall x \in X \cap U$.

$\iff$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$ tale che $|x - x_0| < \delta$.

ESEMPI

1) $f(x) = x$ è continua in x_0, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x<0 \\ x+1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$



f non è continua in $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x+1 = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$! $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0} f(x) \nexists$

quindi non è vero che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 1$

Si noti che se $x_0 \neq 0$, allora f è continua in x_0.

3) $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

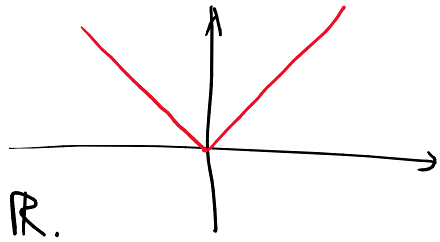
4) $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
È continua in 0? no perché $0 \notin \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathrm{Dom}(f)$

5) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
f è continua in tutti i punti del suo dominio

6) $f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a>0$
è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

7) Allo stesso modo $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ continue in x_0 $\forall x$ nel dominio

8) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



f è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo che è continua in $x_0 = 0$.

$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0} x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$

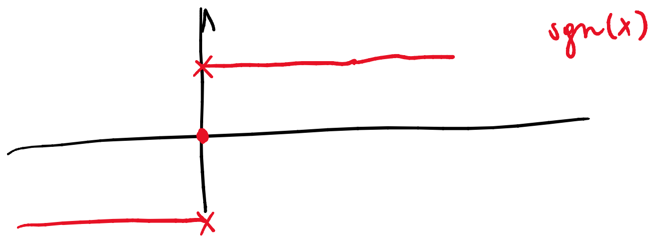
$|x|$ è continua in $x_0 = 0$.

Funzione segno

$sgn : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto sgn(x)$

$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$sgn(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



sgn è una funzione continua in x_0 $\forall x_0 \neq 0$ e non è continua in $x_0 = 0$.

• Funzione parte intera

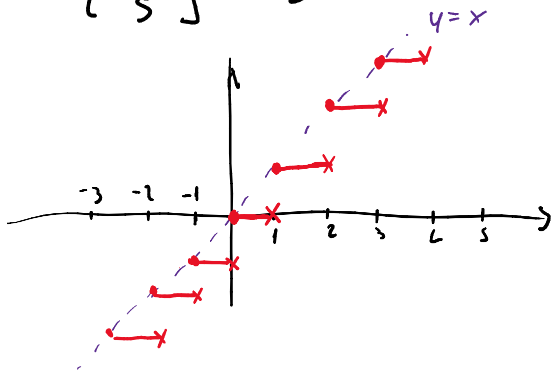
$[\cdot] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto [x]$

dove $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

- Se $x \in \mathbb{Z}$, $[x] = x$
- Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $x = n, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ allora $[x] = n$
- Se $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ e $x = -n, a_1 a_2 \ldots$ allora $[x] = -n - 1$

$\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ $\qquad [-2,7] = -3$

$\left[\frac{18}{5}\right] = 3$



- f è continua in x_0 se $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- f è discontinua in x_0 se $x_0 \in \mathbb{Z}$