# MATEMATICA 12

mercoledì 3 novembre 2021 00:09

## Riepilogo della scorsa lezione:

1) Intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^*$
2) Punti di accumulazione di un insieme
3) Definizione di limite: Se $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $x^0 \in D(X)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$:

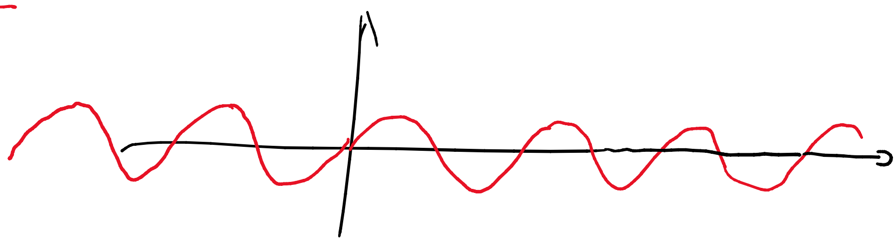
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall V \text{ intorno di } \ell \ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } f(x) \in V \quad \forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$$

$$\iff \forall V \text{ intorno di } \ell \text{ si ha } f(x) \in V \text{ definitivamente per } x \to x_0$$

4) Limiti di funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi)

## Funzioni trigonometriche

- $f(x) = \text{sen}\, x$

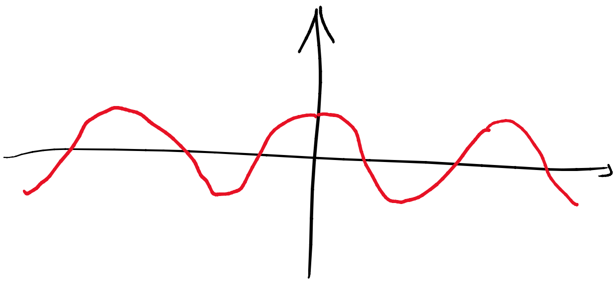


$\lim_{x \to +\infty} \sin x \ \nexists$

$\lim_{x \to -\infty} \sin x \ \nexists$

$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \cos x$



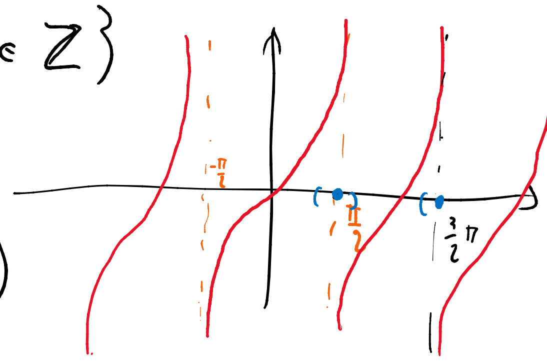
$\lim_{x \to +\infty} \cos x \ \nexists$

$\lim_{x \to -\infty} \cos x \ \nexists$

$\lim_{x \to x_0} \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$



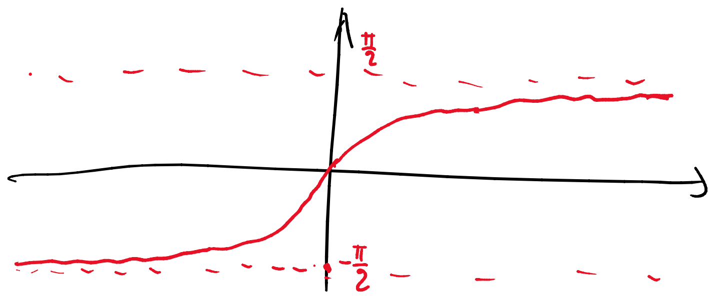

$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{tg} x \quad \nexists$

$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ se $x_0 \in Dom(f)$

$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$




$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$

---

- TEOREMA (UNICITÀ DEL LIMITE)

Sia $f: X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, allora $l_1 = l_2$.

DIM

Per assurdo, supponiamo che $l_1 \neq l_2$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \forall V_1$ intorno di $l_1$ $\exists U_1$ intorno di $x_0$ t.c. $f(x) \in V_1 \quad \forall x \in X \cap U_1 \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \forall\ V_2$ intorno di $l_2$ $\exists\ U$ intorno di $x_0$ t.c. $f(x) \in V_2$ $\forall x \in X \cap U_2 \setminus \{x_0\}$

Siccome $l_1 \neq l_2$ $\exists\ V_1$ intorno di $l_1$ e $V_2$ intorno di $l_2$ t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Siano $U_1$ e $U_2$ come nelle definizioni di limite.

Allora $U_1 \cap U_2$ è un intorno di $x_0$.

Sia $x \in U_1 \cap U_2 \cap X \setminus \{x_0\}$ allora

$$\left.\begin{array}{l} x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_1 \\ x \in U_2 \cap X \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

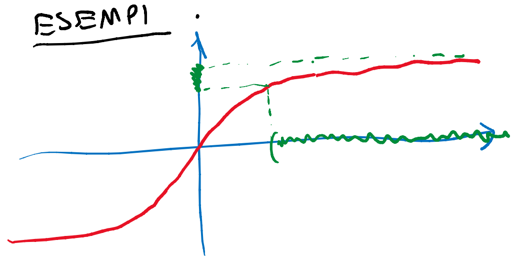
assurdo ↯

## TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$ e $l \in \mathbb{R}^*$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

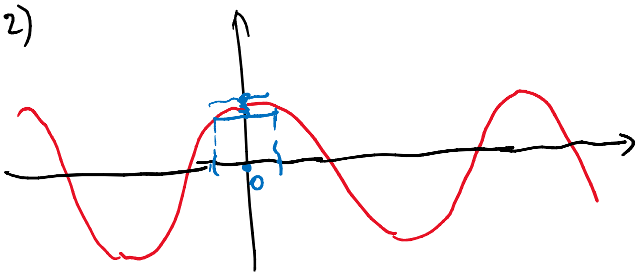
Se $l \neq 0$ allora $\exists\ U$ intorno di $x_0$ t.c. $f(x)$ ha lo stesso segno di $l$ $\forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$.

ESEMPI

1) 

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} > 0$

Quindi in un intorno di $+\infty$ si ha $\operatorname{arctg} x > 0$

2) 


$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1 > 0$

Quindi $\exists\ r > 0$ t.c. $\cos x > 0$ $\forall x \in (-r, r)$

## CONSEGUENZA

Siano $f: X \longrightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in D(X)$ e $l \in \mathbb{R}^*$

Se $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora $l \geq 0$.

## VERSIONE GENERALE

Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$ e $l \in \mathbb{R}^*$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

1) Se $l > a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ allora $f(x) > a$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

2) $l < a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ allora $f(x) < a$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

3) Se $f(x) \geq a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora $l \geq a$

4) Se $f(x) \leq a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora $l \leq a$.

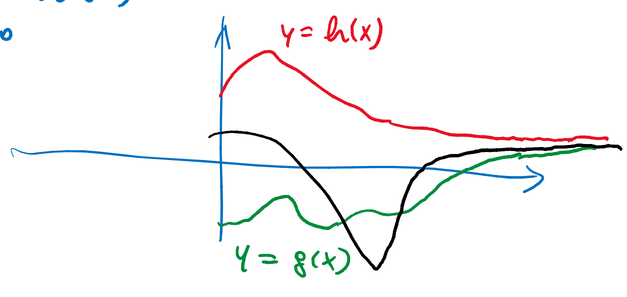
## TEOREMA DEL CONFRONTO (O DEI CARABINIERI)

Siano $f, g, h : X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(f)$, $l \in \mathbb{R}^*$. Assumiamo che:

1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

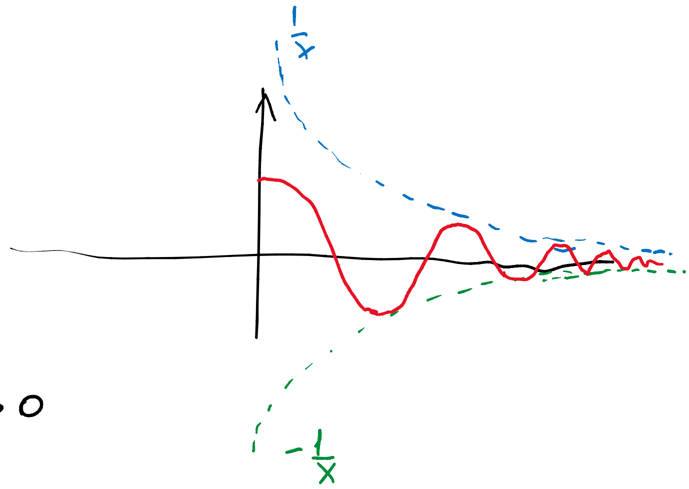
2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.



ESEMPIO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$




$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Se $x > 0$ (e quindi $\frac{1}{x} > 0$)

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Teorema del confronto $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

OSS Nel teorema del confronto:

Se $l = +\infty$ basta $f(x) \geq g(x)$ (non serve $f(x) \leq h(x)$)

Se $l = -\infty$ basta $f(x) \leq h(x)$.

---

## Operazioni tra limiti

TEOREMA

Siano $f, g : X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ (per ora, escludiamo $l_1, l_2 = \pm\infty$) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2.$$

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$

2) $\lim_{x \to x_0} c f(x) = c\, l_1 \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = l_1 l_2$

4) Se $l_2 \neq 0$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

ESEMPI

- $\lim_{x\to 0} 2e^x + x = 2\lim_{x\to 0} e^x + \lim_{x\to 0} x = 2\cdot 1 + 0 = 2$
- $\lim_{x\to \pi} x^2(\cos x)^3 = \pi^2\cdot(-1)^3 = -\pi^2$
- $\lim_{x\to 2} \dfrac{3^x}{x-3} = \dfrac{3^2}{2-3} = -9.$

OSS

In molti casi il teorema vale anche se $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$.

Per la somma:

- $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}$, allora $l_1 + l_2 = +\infty$.
- $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 = +\infty$ : $l_1 + l_2 = +\infty$
- $l_1 = -\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 + l_2 = -\infty$
- $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 = -\infty$ : $l_1 + l_2 = -\infty$
- $l_1 = +\infty$ e $l_2 = +\infty$ : $l_1 + l_2 = +\infty$
- $l_1 = -\infty$ e $l_2 = -\infty$ : $l_1 + l_2 = -\infty$.

(Non possiamo dire nulla se $l_1 = +\infty$ e $l_2 = -\infty$ o $l_1 = -\infty$ e $l_2 = +\infty$)

- Per il prodotto per una costante $c \in \mathbb{R}$:
  - Se $l_1 = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} c f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$
  - Se $l_1 = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} c f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$

- Per il prodotto di due funzioni:

- Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_2>0 \\ -\infty & \text{se } l_2<0 \end{cases}$

- Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_2>0 \\ +\infty & \text{se } l_2<0 \end{cases}$

- Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 = +\infty$ oppure $l_1 = l_2 = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$

- Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 = -\infty$ oppure $l_1 = -\infty$ e $l_2 = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$

(Nota: escludiamo $0 \cdot +\infty$ e $0 \cdot (-\infty)$)

Per il quoziente:

- Se $l_1 = \pm\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l_1 & \text{se } l_2>0 \\ -l_1 & \text{se } l_2<0 \end{cases}$

- Se $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \in \{+\infty, -\infty\}$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

E se $l_2 = 0$? (in generale non si può dire nulla a meno che non si conosca il segno di $g(x)$)

- $l_2 = 0^+$ allora $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$
- $l_2 = 0^-$ allora $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$

(Restano esclusi $\frac{+\infty}{+\infty}$ $\frac{-\infty}{-\infty}$ $\frac{+\infty}{-\infty}$ $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{0}{0}$)

ESEMPI

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - 3x = 0 - 3\cdot(+\infty) = 0 - \infty = -\infty$

- $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} x e^x = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

- $\lim_{x \to 2} \frac{-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

- $\lim_{x \to 2} \frac{-x}{|x-2|}$ $\nexists$ il limite

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-x}{x-2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-x}{x-2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

---

Se troviamo una forma indeterminata bisogna provare a risolverla:

- $\lim_{x \to +\infty} x - x^2 = +\infty - (+\infty)$ forma indeterminata.

$$\lim_{x \to +\infty} x - x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty\,(0 - 1) = -\infty$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+x-1}$ forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\to +\infty \qquad \to +\infty$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ $\to 0$ / $\to 0$ forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$

**Nota.** Dato un polinomio di II grado

$a x^2 + b x + c$

Se le radici sono $x_1$ e $x_2$ (nell'esempio $x_1 = 1$, $x_2 = -3$)

allora il polinomio si scompone come

$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Nell'esempio

$x^2 + 2x - 3 = \underset{1}{a}(x - \underset{1}{x_1})(x - \underset{-3}{x_2})$

$= (x - 1)(x - (-3))$

$(x-1)(x+3)$

- **Limite di funzioni composte** $(g(f(x)))$

Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ due funzioni con $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$, $y_0 \in D(Y)$.

Assumiamo:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

2) $\lim_{y \to y_0} g(x) = l \in \mathbb{R}^*$.

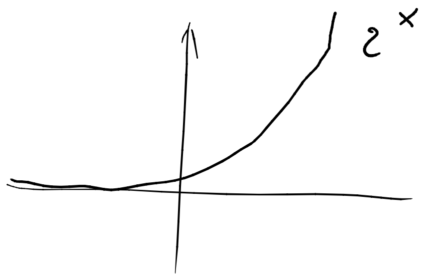
3) $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

**Nota:**
L'ipotesi 3 si può eliminare se $y_0 \in Y$ e $g(y_0) = \ell$.

ESEMPI

- $$\lim_{x\to+\infty} 2^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}} = \lim_{y\to 0} 2^y = 1$$



- $$\lim_{x\to 0^-} 2^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to -\infty}} = \lim_{y\to -\infty} 2^y = 0$$

- $$\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} 2^y = +\infty.$$

- $$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x^2+3}_{\to+\infty}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$ (forma indeterminata)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = -1$$

**Limiti di potenze:** $f(x)^{g(x)}$

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in (0,+\infty)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = r \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = l^{r}$

- se $l = +\infty$ e $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } r > 0 \\ 0 & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

- se $l = 0^{+}$ e $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ +\infty & r < 0 \end{cases}$$

- se $l \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$ e $r = +\infty$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 1 \\ 0 & \text{se } l < 1 \end{cases}$$

- se $l \in (0, +\infty]$ o $l = 0^{+}$ e $r = -\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } l > 1 \\ +\infty & \text{se } l < 1 \end{cases}$$

## Forme indeterminate per le potenze

$(+\infty)^{0}$ $\quad 1^{\infty}$, $1^{-\infty}$ $\quad 0^{0}$ $\quad (-\infty)^{0}$