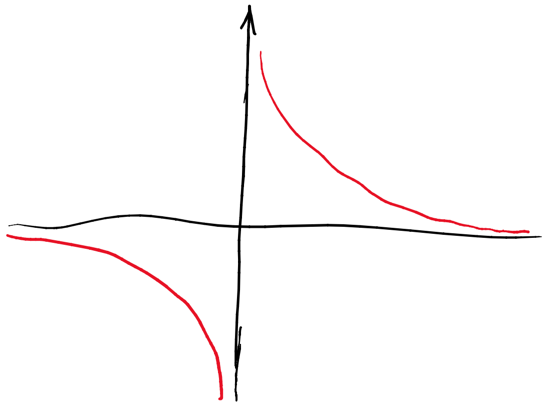
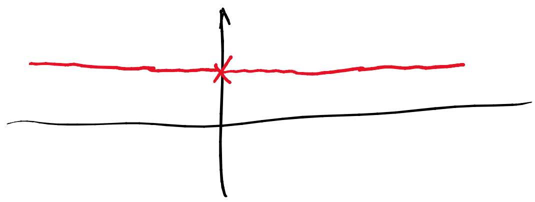
LIMITI DI FUNZIONI

$f(x) = \frac{1}{x}$



- Se x è molto grande $f(x)$ è vicina a 0
- Se $x > 0$ e x è vicino a 0, allora $f(x)$ è "vicina a $+\infty$"
- Se $x < 0$ e x è vicino a 0, allora $f(x)$ è "vicina a $-\infty$"

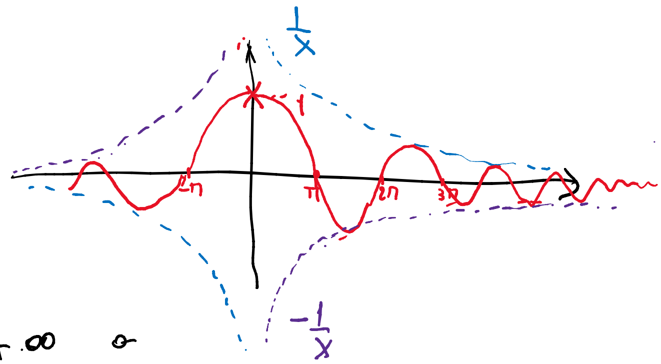
- $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2}}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



per x vicina a 0, $f(x)$ è vicina a 1 (in realtà uguale)

- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



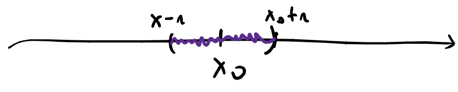
Per x vicina a $+\infty$ o a $-\infty$, $f(x)$ è vicina a 0
Si può anche dimostrare che $f(x)$ è vicino ad 1 se x è vicino a 0.

Def:

- Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, definiamo INTORNO (SFERICO) di x_0 un qualsiasi intervallo del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

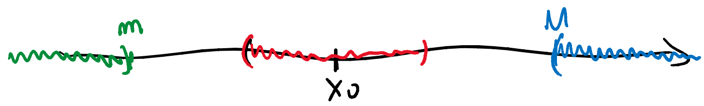
Notiamo che:

$(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$



Def:

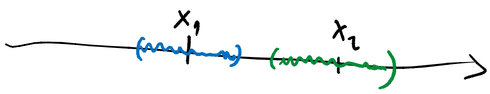
- Definiamo INTORNO DI $+\infty$ un qualsiasi intervallo del tipo $(M, +\infty)$ con $M \in \mathbb{R}$.
- Definiamo INTORNO DI $-\infty$ un qualsiasi intervallo del tipo $(-\infty, m)$ con $m \in \mathbb{R}$.



- Notazione: Poniamo $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
  ($\mathbb{R}$ AMPLIATO)

PROPRIETÀ (degli intorni)

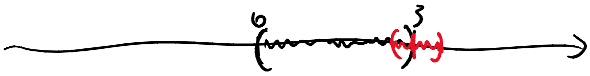
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e U è un intorno di x_0 allora $x_0 \in U$.
- Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$, allora:
  1) Ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi
  2) Se U e V sono due intorni di x_0 allora $U \cap V$ è un intorno di x_0.
  3) Se U è un intorno di x_0, allora $\exists\ V$ intorno di x_0 tale $V \subsetneq U$.
  4) (Proprietà di separazione) Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ e $x_1 \neq x_2$ allora $\exists\ U_1$ intorno di x_1 e U_2 intorno di x_2 t.c. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$



Def: Sia X un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Diremo che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per X se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di X.

ESEMPI

- $X = (0, 3)$



L'insieme dei punti di accumulazione è $[0, 3]$

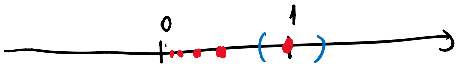
Notazione: L'insieme dei punti di accumulazione di X si indica con $D(X)$. Quindi possiamo scrivere che:

$D((0,3)) = [0, 3]$.

- $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots \}$.

$D(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$.

- $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \dots \}$



$D(X) = \{0\}$

$\forall r > 0$, se $n > \frac{1}{r}$ allora $\frac{1}{n} < r$ e $\frac{1}{n} \in (-r, r)$

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D(X)$ e $l \in \mathbb{R}^*$. Si dice che l è il LIMITE di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\forall$ V intorno di l $\exists$ U intorno di x_0 tale che $f(x) \in V \quad \forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$

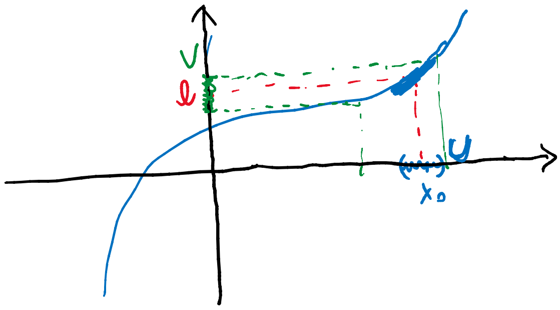
Notazione:

Se l è il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ scriveremo

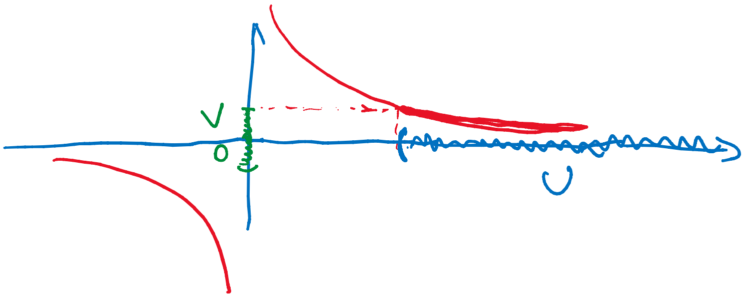
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

oppure

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$ ($f(x)$ tende ad ℓ per $x \to x_0$)



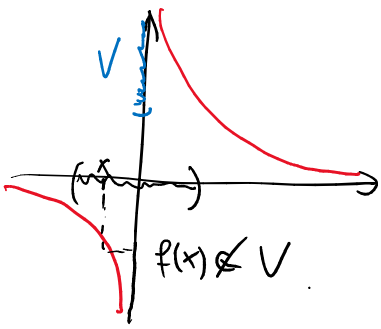
• $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$



• <u>Attenzione</u>:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non è $+\infty$ né $-\infty$.

in questo caso $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists$



<u>Definizioni equivalenti</u>:

Se $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D(X)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Allora:

• se $x_0, \ell \in \mathbb{R}$:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ si ha $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = +\infty$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) > M.$$

- Se $x_0 = +\infty$, $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in X \text{ con } x > M \text{ si ha } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

- Torniamo all'esempio $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Per dimostrarlo bisogna far vedere che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $x > M$ si ha $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

Possiamo cercare $M > 0$. Allora, $x > M \implies x > 0$. Quindi:

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{x} < \varepsilon \iff 1 < \varepsilon x \iff \frac{1}{\varepsilon} < x$$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$, possiamo prendere $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Allora: $\forall x$ t.c. $x > M$ si ha $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

Altra definizione equivalente.

Def: Sia $P(x)$ una proprietà che dipende da un numero $x \in X$ e sia $x_0 \in D(X)$. Diremo che la proprietà $P(x)$ è vera DEFINITIVAMENTE per $x \to x_0$ se $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che $P(x)$ è vera $\forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$.

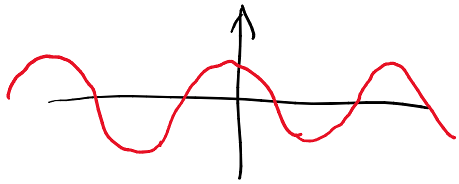
ESEMPIO

- $f(x) = \frac{1}{x}$

  $f(x)$ è definitivamente positiva per $x \to +\infty$.

- $f(x) = \cos x$

  $\cos x > 0$ definitivamente per $x \to x_0$



OSS

Sia $f: X \longrightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D(X)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Allora:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\, V$ intorno di ℓ si ha $f(x) \in V$ definitivamente per $x \to x_0$

Limite destro e sinistro.

Def. Sia X un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Diremo che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DESTRO per X (o un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA per X) se x_0 è un punto di accumulazione per $X \cap (x_0, +\infty)$.
(Cioè se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di X alla destra di x_0.)

Analogamente, diremo che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE SINISTRO per X (o u PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA SINISTRA per X) se x_0 è un punto di accumulazione per $X \cap (-\infty, x_0)$.
(Cioè se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di X alla sinistra di x_0.)

Notazione

L'insieme dei punti di accumulazione da destra per X si indica con $D^+(X)$ (da sinistra con $D^-(X)$).

ESEMPIO

$$X = (0, 3)$$

$$D^+(X) = [0, 3)$$

$$D^-(X) = (0, 3]$$

In U ci sono infiniti elementi di $(0,3)$ alla destra di 0.

Nessun elemento di $(0,3)$ alla sinistra di 0.

Notazione:

Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione e sia $A \subseteq X$. Denotiamo con $f|_A$ la RESTRIZIONE di f all'insieme A cioè

$$f_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Def (limite destro/sinistro)

Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D^+(X)$ e $l \in \mathbb{R}^*$. Si dice che l è il LIMITE DESTRO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (x_0, +\infty)} = l$.

Se $x_0 \in D^-(X)$, si dice che l è il LIMITE SINISTRO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)} = l$

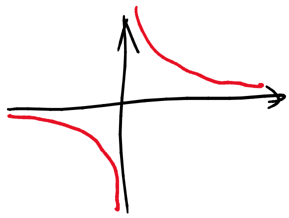
Notazione

Limite destro: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Limite sinistro: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

OSSERVAZIONE

Se $x_0 \in D^+(X) \cap D^-(X)$ allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Limiti per eccesso / difetto

Def: Sia $f: X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Diremo che ℓ è IL LIMITE PER ECCESSO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se:

$\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V \cap (\ell, +\infty)$ $\forall\, x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$.

Scriveremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$.

Diremo invece che ℓ è il LIMITE PER DIFETTO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V \cap (-\infty, \ell)$ $\forall\, x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$.

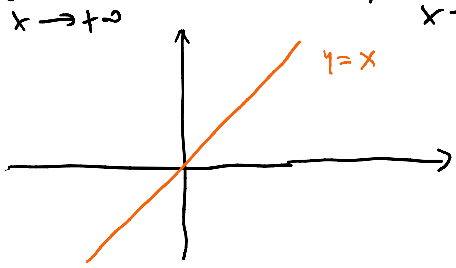
ESEMPI

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

Limiti di funzioni elementari:

- $f(x) = x$

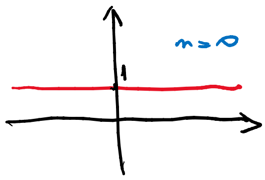
$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

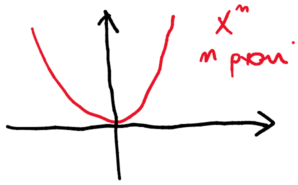


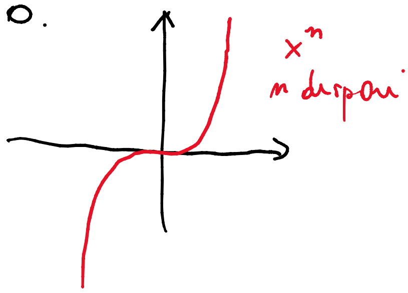
- **Potenze naturali**: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

  - $\lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ +\infty & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$

  - $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari}, n \neq 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n = 0. \end{cases}$

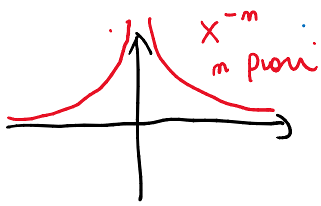


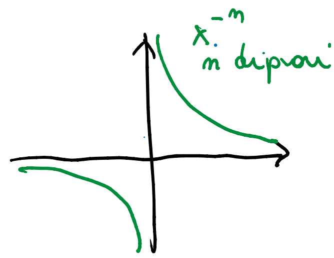




  - Se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora
    $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$,

Potenze intere (negative). $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$





- $\lim_{x \to +\infty} x^{-n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (0^+)$

- $\lim_{x \to -\infty} x^{-n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

  (0^+ se n è pari e 0^- se n è dispari)

- $\lim_{x \to 0} x^{-n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \nexists & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Se n è dispari si ha che:

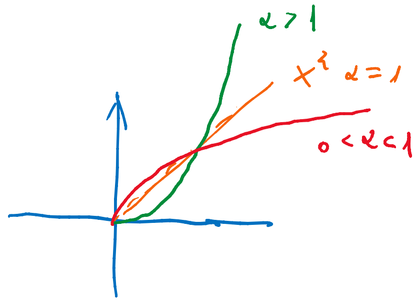
$$\lim_{x\to 0^+} x^{-n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x^{-n} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ allora $\lim_{x\to x_0} x^{-n} = x_0^{-n}$.

Potenze reali

$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

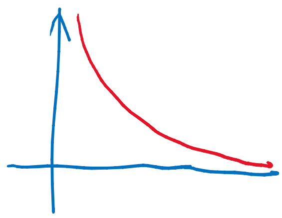


- Se $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall\, x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$$

- Se $\alpha < 0$:



$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall\, x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$$

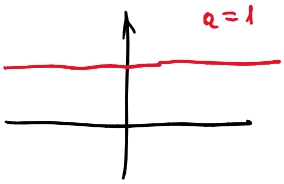
AD ESEMPIO:

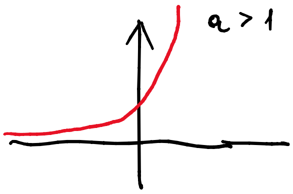
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\nexists$ perché $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$

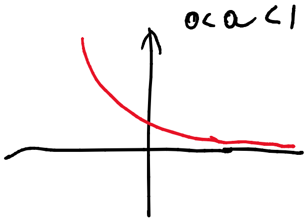
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

Limiti per gli esponenziali

Dato $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $f(x) = a^x$


$a = 1$


$a > 1$


$0 < a < 1$

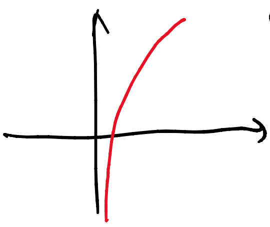
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

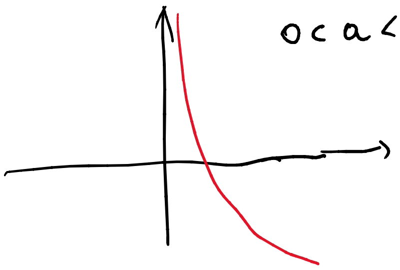
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$$

Limiti per i logaritmi

$f(x) = \log_a x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$


$a > 1$


$0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$