

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n 2^n}{3^n + 1}$$

SERIE A

TERMINI

POSITIVI

APPLICHI IL CRITERIO DELLA RADICE

1 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ SERIE A TERMINI POSITIVI

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Se $0 \leq l < 1$, la serie converge

Se $l > 1$ la serie diverge

Calcolo n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n \cdot 2^n}{3^n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \frac{2^n}{3^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$$

Calcolo e parte

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = \lim_n e^{\frac{1}{n} \lg n};$$

$\lim_n \frac{\lg n}{n} = 0$ perché $\lg n$ va
 a $+\infty$ molto più lentamente
 di n .

Ritornando inoltre $\frac{1}{n} \cdot \lg n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \cdot \lg n} = e^0 = 1$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n \cdot \lg n}{3^{n+1}}} \geq \frac{2}{3} < 1$$

per il teorema sulle radici, la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \lg \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} \right)$$

$$1 + \frac{3}{\sqrt{n}} > 1 \Rightarrow \lg \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} \right) > 0 \quad \int \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n+1} > 0$$

SERIE A TERMINI POSITIVI

Si applicano il criterio del rapporto o delle radici, nessuno nel caso $l=1$, che non dà informazioni sul convergere delle serie

Uniamo il criterio del confronto

- Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serie a termini

positivi. Se $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq a_n \leq b_n$

e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\textcircled{x}$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

$\forall x \geq 0$ $\lg(1+x) \leq x$. Allora

$$\lg\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \left(n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \right)$$

Also $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \lg \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} \right) &\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = \\ &= \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Consequently

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$$

lyfelt ;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è la serie armonica generalizzata
con esponente $\frac{3}{2} > 1$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$

Per il criterio del confronto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \lg\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \left(\underbrace{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}_{\geq 0} \right)$$

Uniamo il tutto del comparempio

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ serie a termini
positivi.

$$\text{Se } l = \lim_n \frac{a_n}{b_n} \in]0, +\infty[$$

Allora la serie $\sum a_n$ ha lo stesso carattere
(convergenza o divergenza o entrambi divergenti)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \cdot \underbrace{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})}_{\text{}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \cdot \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \cdot \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \cdot \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^3} \cdot \sqrt{n}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n}} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie ha la stessa convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ che \u00e8 divergente.}$$

Allora la serie diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$$

STUDIARE CONVERGENZA E

ASSOLUTA CONVERGENZA

è una serie convergente assolutamente, allora
converge, quindi partiamo dalle conv. ~~assolute~~

Studio

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (\underbrace{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}_{\geq 0})| = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$$

Scriviamo la serie in maniera diversa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

Passo alla conf. ∞ con la regola

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$$

Alors la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ diverge

Da $u_n > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \quad \text{von}$$

convergi ABSOLUTAMENTE

Studieren wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})}_{\geq 0}$$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \right)$ SERIE A SEGNO ALTERNANTE

Criterio di LEIBNIZ.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$ serie a segno
alternato.

Supponiamo che:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$(2) \exists M_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq M_0 \quad a_{n+1} \leq a_n$$

$$\boxed{a_{n+1} \neq a_n + 1}$$

Se è vero (1) e (2), la serie converge.

l'ultima, detta $\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

$\forall n \geq 1$

$|\Delta_n - \Delta| \leq a_{n+1}$

vorremmo applicare il criterio di LEIBNIZ
alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) =$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = 0 \quad (\text{On})$$

DEVO VERIFICARE CHE $\exists M_0 \in \mathbb{N}$

, h $\forall n > M_0$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1+3} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$$

OSS, e

$$\frac{1}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \quad (\geq)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n} - \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} \leq 0$$

$$\forall n \geq 1$$

LA SUCCESSIONE

$$a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n} \text{ è strettamente}$$

Se ne verifica la proprietà del criterio. Si è visto che
quindi la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n^2}{n!}$$

STUDIARE IL CARATTERE DI QUESTA

SERIE

NON È UNA SERIE A TERMINI

POSITIVI, STUDIARE L'ASSOLUTA

CONVERGENZA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n^2}{n!} \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n^2}{n!}$$

usando el criterio del confronto :

$$\forall n \geq 1$$

$$\frac{|\cos n|}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n^2}{n!} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n^2}{n!}}_{\text{---}}$$

↑ us la disuguaglianza

$$|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

STU DIAMO LA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n+1} \, n!}$$

Traccia : $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Criterio del Rapporto

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$

Se $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Se $0 \leq l < 1$, la serie converge, se $l > 1$, la serie diverge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n+1+1} (n+1)!} =$$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n+1} \cdot n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n+2} (n+1)!} \cdot \frac{\sqrt{n+1} \cdot n!}{n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}}_{\downarrow 1} \cdot \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \quad (*)$$

$$(n+1)! = (n+1) \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_{n!} =$$

$$= (n+1) \cdot n!$$

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \cancel{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad ;$$

$0 < 1 \Rightarrow$ la suite converge

Per il criterio del confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n+1}} \quad \frac{n^2}{n!} \quad \text{converge}$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n+1}} \quad \frac{n^2}{n!} \quad \text{converge
assolutamente}$$

e, quindi, CONVERGE -