

Tabelle delle primitive

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \lg|x| + c \dots$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\lg a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\omega'x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + c$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + c$$

$$\int 3x^2 + 2e^x dx =$$

$$= 3 \int x^2 dx + 2 \int e^x dx$$

$$= 3 \frac{x^3}{3} + 2 e^x + c = x^3 + 2e^x + c$$

$$\int [a f(x) + b g(x)] dx$$

$$= a \int f(x) dx +$$

$$+ b \int g(x) dx$$

$$\int_1^{1,2} \frac{e^{\cos x} - x}{x \cos^2 x} dx = \int_1^{1,2} \frac{\cancel{e^{\cos x}} - x}{x \cancel{\cos^2 x}} dx +$$

$$= \int_1^{1,2} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cos^2 x} dx = \int_1^{1,2} \frac{1}{x} - \int_1^{1,2} \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \left[\lg(x) - \lg x \right]_1^{1,2} =$$

$$= \lg(1,2) - \lg(1,2) - \lg 1 + \lg 1 =$$

$$= \lg(1,2) - \lg(1,2) + \lg 1$$

- Gli integrali indefiniti sono insiemi di funzioni, in particolare sono l'insieme di tutte le primitive di una certa funzione.

- Gli integrali definiti sono numeri, e rappresentano l'area con SEGNO di una certa funzione.

$$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

(formula di BISEZIONE
DEL COSENO)

$$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \dots$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \sin x + c$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I tale che φ' è continua in I .

Sia $J = \varphi(I)$ e $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Sia F una primitiva di f e considero
 $F \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) =$$

DERIVAZIONE FUNZIONE
COMPOSTA

$$\underline{\underline{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}}$$

$$[F' = f]$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int (F \circ \varphi)'(x) dx$$

$$= F(\varphi(x)) + c$$

FORMULA PER L'INTEGRALE PER
SOSTITUZIONE

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \stackrel{a=\varphi(x)}{=} F(\varphi(x)) + c$$

con F primitiva di f

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \stackrel{a=\varphi(x)}{=} \int f(u) du$$

$$= F(u) + c = F(\varphi(x)) + c$$

$$a = \varphi(x)$$

$$\frac{da}{dx} = \frac{d}{dx} \varphi(x) = \varphi'(x)$$

$$\boxed{da = \varphi'(x) dx}$$

$$\int \underbrace{f(\varphi(x))}_a \cdot \underbrace{\varphi'(x) dx}_{da} \stackrel{a = \varphi(x)}{=} \int f(a) da$$

$$= F(a) + c = F(\varphi(x)) + c$$

da formula vale anche per gli integrali definiti

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \quad \underline{\underline{\Delta = \varphi(x)}}$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = [F(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} =$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \quad \therefore$$

$$\int \overbrace{\sin^2 x \cdot \cos x}^{x/c \cdot \cos x} dx$$

$$\Delta = \sin x$$

$$d\Delta = \cos x dx$$

$$= \int \Delta^2 d\Delta = \frac{\Delta^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{1+e^{2x}} dx =$$

$$\stackrel{u}{=} \int_1^e \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= [\arctan u]_1^e =$$

$$= \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

~~~~~

$$u = e^{\sqrt{x}}$$

$$du = e^{\sqrt{x}} dx$$

$$x = 0$$

$$u = e = 1$$

$$x = 1$$

$$u = e^1 = e$$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx =$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^4} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \arctan u^2 + c$$

or

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx$$

Not possible  
with the partition  
 $u = x^2$

$$\int x \cdot e^{3x^2} dx$$

$$u = 3x^2$$

$$du = 6x dx$$

$$= \frac{1}{6} \int 6x e^{3x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int e^u du = \frac{1}{6} e^u + C = \frac{1}{6} e^{3x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{x \lg x} dx$$

$$u = \lg x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \lg |u| + C = \lg |\lg x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+2} dx = \int \frac{1}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \quad \quad \quad 2 = (\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx =$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = u$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

## INTEGRAZIONE PER PARTI

Siano  $f, g$  derivabili e con derivate prime continue

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando

$$\int_a^b (f \cdot g)'(x) dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\left[ f(x)g(x) \right]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\underbrace{f(b)g(b) - f(a)g(a)}_{\text{}} = \underbrace{\int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx}_{\text{}}$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

(FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI  
PER GLI INTEGRALI DEFINITI)

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

(FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI  
PER INTEGRALI INDEFINITI)

$f'$  è una funzione differenziabile  
 $g$  è una funzione finita

$$\int x e^x dx$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = x$$

$$g'(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx =$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Partiello reglen

$$f'(x) = x$$

$$g'(x) = e^x$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g'(x) = e^x$$

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

$e^x$  ist ein "besser" funktion differential.

$x$  noch lae

$$\int x \cos x dx$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$g(x) = x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$g'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx = \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

$\sin x / \cos x$

non "buoni" fattori  
differentiali

$$\int x^2 e^x dx$$

$$f'(x) = e^x$$

$$g(x) = x^2$$

$$f(x) = e^x$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \underbrace{2 \int x e^x dx}_{\downarrow \text{DI NUOVO PER PARTI}} = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

DI NUOVO PER PARTI

DEVO PRENDERE

$e^x$  come fattore DIFFERENZIALE

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx =$$

$$f'(x) = x$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = e^x$$

$$g'(x) = e^x$$

$$= x^2 e^x - 2 \left( \frac{x^2}{2} e^x \right) + 2 \int \frac{x^2}{2} e^x dx =$$

$$= \cancel{x^2 e^x} - \cancel{x^2 e^x} + \int x^2 e^x dx$$

0  $\pi \in \mathbb{N}$  )  $A \neq \emptyset$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 e^x dx$$