$$h(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$$

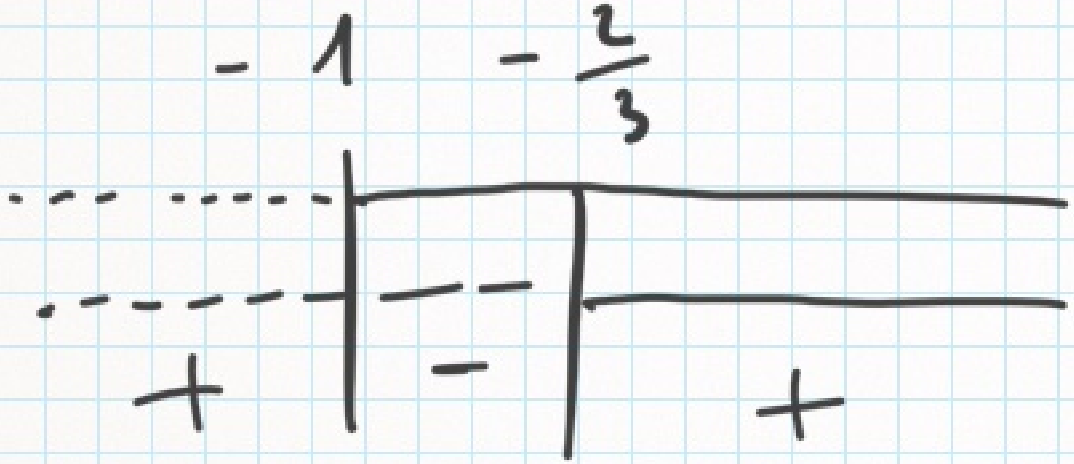
CALCOLARE LA DERIVATA DI h

DOMINIO DI h

$$\frac{3x+2}{x+1} > 0$$

$3x+2>0 \qquad x > -\frac{2}{3}$

$x+1>0 \qquad x>-1$



$$\boxed{x<-1 \ \vee \ x>-\frac{2}{3}}$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$$

$$h = g \circ f$$

$$g : y > 0 \longmapsto \lg y$$

$$f : x \in \underbrace{]-\infty, -1[\cup]-\tfrac{2}{3}, +\infty[}_{D} \longmapsto \frac{3x+2}{x+1}$$

$\forall x \in D$

$$\boxed{h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

$g: y \mapsto \ln y$

$$g'(y) = \frac{1}{y} \qquad g'(f(x)) = \frac{1}{\frac{3x+2}{x+1}} =$$

$$= \frac{x+1}{3x+2}$$

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - 1\cdot(3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{3x}+3-\cancel{3x}-2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$= \frac{\cancel{x+1}}{3x+2} \cdot \frac{1}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{(3x+2)(x+1)}$$

h' è definita per $x \neq -1$, $x \neq -\frac{2}{3}$

e il dominio di h è

$$x < -1 \ \vee \ x > -\frac{2}{3}$$

Allora h è derivabile nel suo dominio

$h' > 0 \implies h$ strettamente monotona crescente

$h'(x) > 0 \iff (3x+2)(x+1) > 0$

$\iff x < -1 \lor x > -\frac{2}{3}$

h è strettamente crescente nel suo dominio.

CALCOLARE LA DERIVATA DI

$h(x) = \operatorname{arctg}(\sin(x^2+1))$

h è definita in $\mathbb{R}$

$$h = k \circ \overbrace{g \circ f}$$

$$k : \quad y \longmapsto \operatorname{arctg} y$$

$$g : \quad z \longmapsto \sin z$$

$$f : \quad x \longmapsto x^2 + 1$$

$$h'(x) = k'\big((g \circ f)(x)\big) \cdot \overbrace{(g \circ f)'(x)}^{\text{formula di derivazione funzione composta}} =$$

$$= k'\big((g \circ f)(x)\big) \cdot \underbrace{g'(f(x)) \cdot f'(x)}_{\text{formula di derivazione funzioni composte}}$$

$$k'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

$$g'(t) = \cos t$$

$$f'(x) = 2x$$

Allora

$$h'(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x^2+1)} \cdot \cos(x^2+1) \cdot 2x$$

Dominio di h' è

$1+\sin^2(x^2+1) \neq 0$, ovvero

$$\underbrace{\sin^2(x^2+1)}_{\geq 0} \neq \underbrace{-1}_{<0}$$

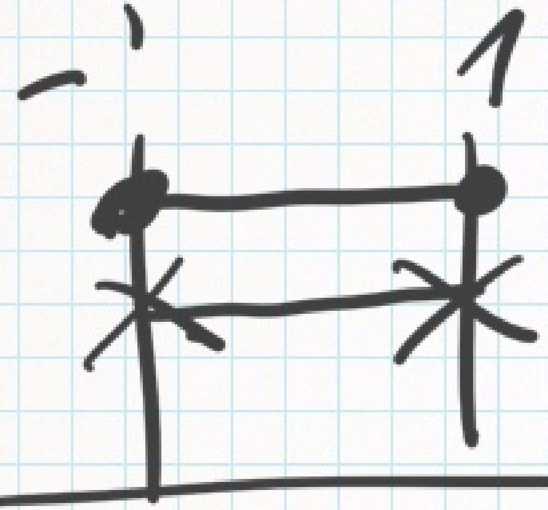
$\forall x \in \mathbb{R}$

h' è definita in $\mathbb{R}$, quindi h è derivabile nel suo dominio

$$h(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

DOMINIO di h:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x^2 > 0 \\ \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$



$$\boxed{-1 < x < 1}$$

$$h'(x) = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2};$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \; (-2x)$$

$$\frac{1 + \arcsin x \,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \cdot \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \cdot \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

h è derivabile in $]-1,1[$

$$f(x) = \sqrt{3x^2-2}$$

$$3x^2-2 \geq 0 \qquad x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}x}{\cancel{2}\sqrt{3x^2-2}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

Il dominio di f' è

$$3x^2-2>0 \qquad x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x \to \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{x - \sqrt{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{x \to \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^+} \frac{\sqrt{3x^2-2} - 0}{x - \sqrt{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{x \to \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^+} \frac{\sqrt{3x^2-2}}{x - \sqrt{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{x \to \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^+} \frac{\sqrt{3\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}}{x - \sqrt{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\ \lim_{x\to\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^+} \frac{\sqrt{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}}{x-\sqrt{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2\sqrt{\frac{2}{3}}}}_{c}\ \lim_{x\to\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^+} \left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= c \lim_{x\to\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

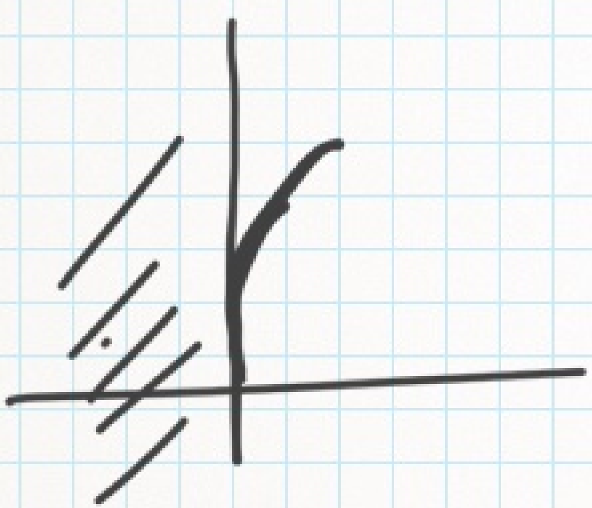


Grafico di una funzione

(1) DOMINIO

(2) EVENTUALI SIMMETRIE (funzioni pari / dispari)

(3) Positività e intersezioni con gli assi

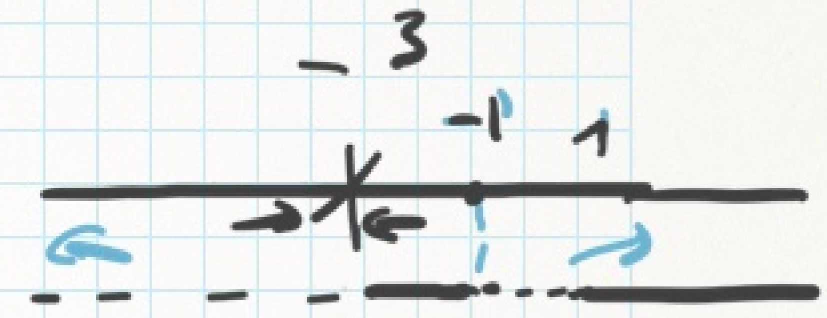
(4) ASINTOTI e intersezioni del grafico di f con gli asintoti orizzontali e obliqui

(5) DERIVABILITÀ e punti di non derivabilità

(6) MONOTONIA della funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$$

D:



Dominio $x \neq -3$

NON è un dominio simmetrico, quindi non devo chiedermi se f è pari o dispari

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0$$

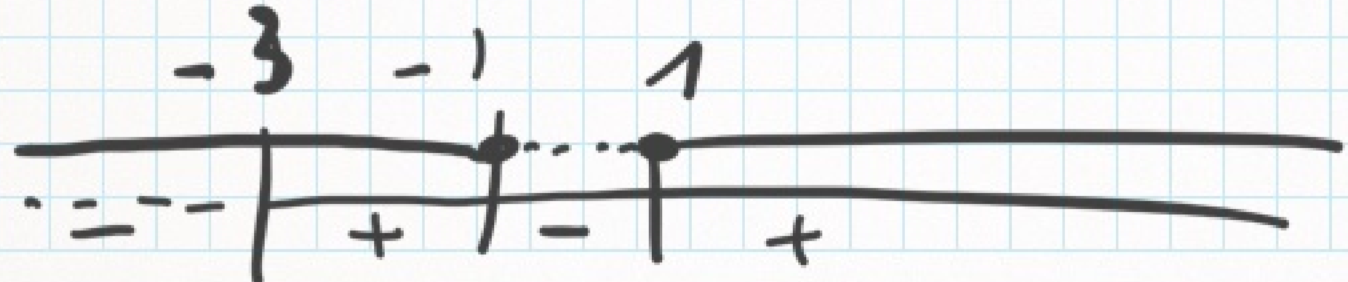
$$\frac{x^2-1}{x+3} \geq 0$$

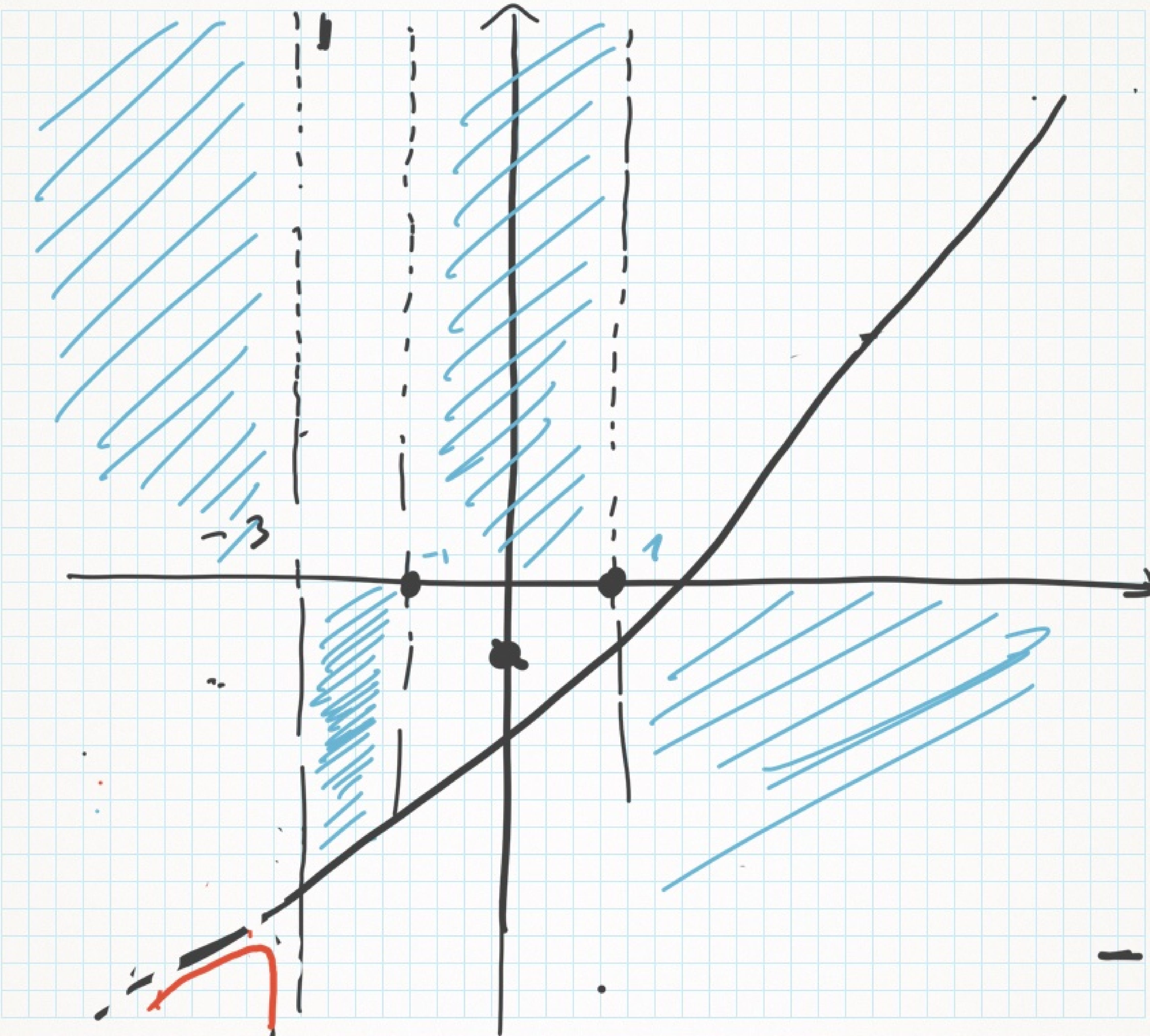
- $x^2-1 \geq 0$

  $x \leq -1 \lor x \geq 1$

- $x+3 > 0$

  $x > -3$




-3
-1
1

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2-1}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2-1}{x+3} = -\infty$$

$x = -3$
ASINTOTO
VERTICALE
DESTRO E
SINISTRO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x+3} = +\infty$$

NON C'È ASINTOTO ORIZZONTALE

CERCHIAMO L'ASINTOTO OBLIQUO

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad , m \neq 0$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx \in \mathbb{R}$$

In tal caso $y = mx + q$ è asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x+3}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x(x+3)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+3x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x+3} - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2} - 3x}{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x-1}{x+3}$$

$$= -3$$

$y = x - 3$ asintoto obliquo a $+\infty$ e a $-\infty$ (controllare a casa)

$$\frac{x^2-1}{x+3} = x-3$$

$$\cancel{x^2} - 1 = (x-3)(x+3) = \cancel{x^2} - 9$$

$$-1 = -9$$

Il grafico di f non interseca l'asintoto obliquo

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2+1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}$$