$$y'' - 4y' + 3y = 6x - 5$$

1) Consideriamo $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$p(t) = t^2 - 4t + 3$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{1 \cdot x}$$

$$= c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$$

2) $y'' - 4y' + 3y = \underbrace{6x - 5}_{g(x)}$

$g(x)$ è un polinomio di I° grado

$$\bar{y}(x) = Ax + B$$

$$\bar{y}'(x) = A$$

$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$0 - 4A + 3(Ax + B) = 6x - 5$$

$$-4A + 3Ax + 3B = 6x - 5$$

$$3Ax - 4A + 3B = 6x - 5$$

$$\begin{cases} 3A = 6 \\ -4A + 3B = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ -8 + 3B = -5 \end{cases} *$$

$$3B = -5 + 8$$

$$3B = 3$$

$$B = 1$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = Ax + B = 2x + 1$$

$$\bar{y}(x) = Ax + B = 2x + 1$$

3) La soluzione generale dell'eq. di partenza

è $y(x) = 2x + 1 + c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$

$$4y'' - 4y' + y = x^2 - 20$$

1) $4y'' - 4y' + y = 0$

$$p(t) = 4t^2 - 4t + 1$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

$$t_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} x$$

2) $4y'' - 4y' + y = \underbrace{x^2 - 20}$

$g(x)$ è un pol. di secondo grado:

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$$\bar{y}''(x) = 2A$$

$$4 \cdot 2A - 4(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = x^2 - 20$$

$$8A - 8Ax - 4B + Ax^2 + Bx + C = x^2 - 20$$

$$Ax^2 - 8Ax + Bx + 8A - 4B + C = x^2 - 20$$

$$Ax^2 + x(-8A + B) + 8A - 4B + C = 1 \cdot x^2 - 20$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -8A + B = 0 \\ 8A - 4B + C = -20 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ -8 + B = 0 \rightarrow B = 8 \\ 8 - 4B + C = -20 \end{cases}$$

$$8A - 4B + C = -20 \qquad\qquad | \; 8 - 4B + C = -20$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 8 \\ 8 - 32 + C = -20 \end{cases} \rightarrow C = -20 + 32 - 8 = 4$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 8 \\ C = 4 \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C = x^2 + 8x + 4$$

3) Conclusione:

La soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} x + x^2 + 8x + 4.$$

ESEMPIO

$$y'' + 4y' = 4x - 1$$

1) $y'' + 4y' = 0$

$$p(t) = t^2 + 4t = t(t+4) \qquad (\Delta > 0)$$

$$t_1 = 0 \qquad t_2 = -4$$

$$y_0(x) = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{-4x} = c_1 + c_2 e^{-4x}$$

2) $g(x) = 4x - 1$ pol di 1° grado

$\bar{y}(x) = Ax + B$ non va bene perché B risolve l'equazione omogena $y'' + 4y' = 0$.

$$\bar{y}(x) = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$$\bar{y}''(x) = 2A$$

$$2A + 4(2Ax + B) = 4x - 1$$

$$2A + 8Ax + 4B = 4x - 1$$

$$8Ax + 2A + 4B = 4x - 1$$

$$\begin{cases} 8A = 4 \\ 2A + 4B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 1 + 4B = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = Ax^2 + Bx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

Regola precisa per trovare $\bar{y}$:

- Se $t = 0$ non è una soluzione di $p(t) = 0$, allora $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado ≤ dal grado di g.
- Se $t = 0$ è una soluzione di $p(t) = 0$ allora $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado ≤ del grado moltiplicato per x.

ESEMPIO

$$2y'' + y' + 5y = 5x^2 + 2x + 3$$

1) $p(t) = 2t^2 + t + 5 \qquad \Delta = 1 - 40 = -39$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-39}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{4} = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{39}}{4}}_{\beta}$$

$$\left(\sqrt{\frac{39}{16}} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{39}}{4} \right)$$

$$y_0(x) = C_1 e^{-\frac{1}{4}x} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{4}x} \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right)$$

2) $2y'' + y' + 5y = \underbrace{5x^2 + 2x + 3}_{g(x)}$

$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$

$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$

$\bar{y}''(x) = 2A$

$2 \cdot 2A + 2Ax + B + 5(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 + 2x + 3$

$4A + 2Ax + B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 + 2x + 3$

$5Ax^2 + 2Ax + 5Bx + 4A + B + 5C = 5x^2 + 2x + 3$

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ 2A + 5B = 2 \\ 4A + B + 5C = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 4 + 5C = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C = x^2 - \frac{1}{5}$

3) $y(x) = x^2 - \frac{1}{5} + c_1 e^{-\frac{1}{4}x} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{4}x} \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right)$

$\ln^2(1+x) = (\ln(1+x))^2$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\ln^2(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$

$= x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x^3 + o(x^3) + o(x^4)$

$= x^2 - x^3 + o(x^3) + \frac{x^4}{4}$

$= x^2 - x^3 + o(x^3)$

$= x \quad - x \quad + o(x) + \frac{\ }{4}$

$= x^2 - x^3 + o(x^3)$

$e^{-\frac{3}{2}x^2} - \cos x = \cancel{1} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 + o(x^4)$

$\quad - \cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

$= -x^2 + \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)$

$N(x) = \cancel{x^2} - x^3 + o(x^3) - \cancel{x^2} + o(x^3) = -x^3 + o(x^3)$

$\ln(1+x)^2 = \ln(1 + \underbrace{2x + x^2}_{y})$

$= \ln(1+y)$

$= y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \quad \dots$

- $y'' + 2y' - 3y = 3x - 1$

  $y(x) = 4e^x + c_2 e^{-3x} - x - \frac{1}{3}$

- $4y'' - 4y' + 5y = 0$

  $c_1 e^{\frac{1}{2}x}\cos x + c_2 e^{\frac{1}{2}x}\sin x + \frac{3}{5}x + \frac{2}{25}$

- $y'' - 2y' - 3y = 3x$

  $c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - x + \frac{2}{3}$

Studio di funzioni

1) Dominio

1) Dominio
2) f pari / dispari
3) Int. con gli assi
4) Segno della funzione
5) Limiti e asintoti
6) Derivata
7) Segno e zeri della derivata
8) Grafico
9) Altro: convessità / immagine - - - .

1) Regole per i domini
- denominatori $\neq 0$.
- argomenti dei logaritmi: > 0
- Argomenti delle radici (di indice pari): ≥ 0

ESEMPI

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-4}$$

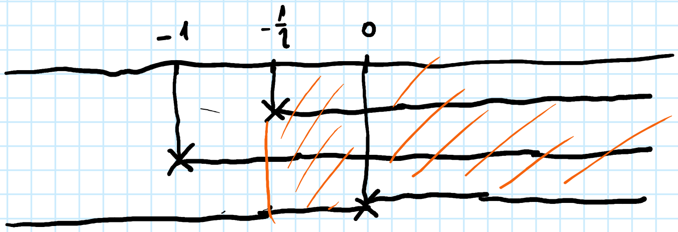
$$\begin{cases} x-1 \neq 0 & \longrightarrow x \neq 1 \\ x^2-4 \neq 0 & \longrightarrow x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$(x^2-4=0 \iff x^2=4 \iff x=\pm\sqrt{4} \iff x=\pm 2)$

- $f(x) = \dfrac{\ln(2x+1) - \ln(x+1)}{x}$

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \ldots > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \ldots > \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



$$-\frac{1}{2} < x < 0 \quad \vee \quad x > 0$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{x^2+1}}{x^2+x-2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2+x-2 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$x^2+x-2 \neq 0 \iff x \neq 1 \text{ e } x \neq -2$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq 1 \text{ e } x \neq -2 \end{cases}$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$
$$= (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty).$$

---

2) funzioni pari / dispari

Si calcola $f(-x)$.

Se è uguale a $f(x)$, la funzione è pari

se è uguale a $-f(x)$, la funzione è dispari

Altrimenti: né pari, né dispari

Altrimenti: né pari, né dispari

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1} = f(x) \quad f \text{ è pari.}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \quad \text{né pari né dispari}$$

$$= -\frac{x^2}{-1+x}$$

- Intersezioni con gli assi:

<u>Asse y</u>: si fa solo se $0 \in Dom(f)$.

- Se $0 \notin Dom(f)$ non ci sono intersezioni con asse y.
- Se $0 \in Dom(f)$ si calcola $f(0)$.
  L'intersezione è il punto $(0, f(0))$

<u>Asse x</u>:
Si risolve l'equazione $f(x) = 0$.
Se le soluzioni sono $x_1, x_2, x_3, \dots$
le intersezioni sono i punti
$(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ ......

---

4) Segno della funzione
5) Limiti agli estremi del dominio
6) Derivate
7) Segno della derivata OK

6) Derivate

7) Segno della derivata   OK

8) Dove $f' > 0$ la funzione cresce

Dove $f' < 0$ la funzione decresce

$$f(x) = x^3 - x$$

• $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

• $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$
$= -(x^3 - x) = -f(x)$

f è dispari.

• Asse y: $\quad f(0) = 0^3 - 0 = 0$

$(0,0)$ è intersezione con l'asse y.

• Asse x:

$x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x = 0 \quad \vee \quad x = \pm 1$

Intersezioni con asse x:

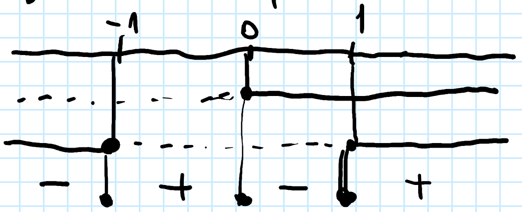
$(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

• Segno: $\quad f(x) = x^3 - x = x(x^2-1)$

• $x \geq 0$

• $x^2 - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq -1$

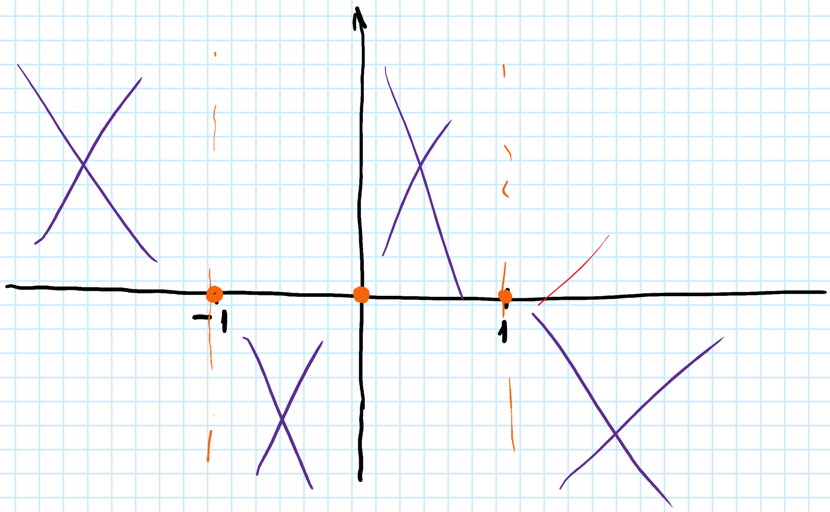
Segno della funzione



$$f(x) > 0 \iff -1 < x < 0 \quad \vee \quad x > 1$$

$$f(x) < 0 \iff x < -1 \quad \vee \quad 0 < x < 1$$

$$f(x) = 0 \iff x = 0, \quad x = \pm 1$$



- $\lim_{x \to +\infty} x^3 - x = \lim_{x \to +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^3 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

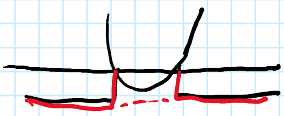
Derivata

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

<u>segno della derivata</u>

$$3x^2 - 1 \geq 0$$



$$3x^2 - 1 = 0 \iff 3x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

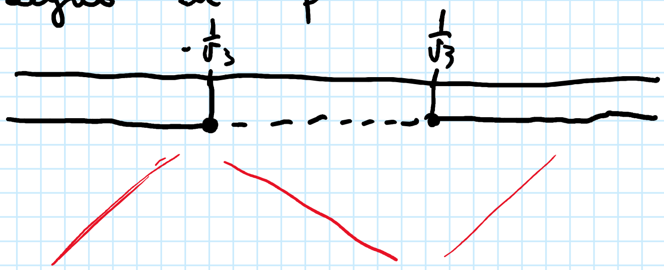
$$\left(x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

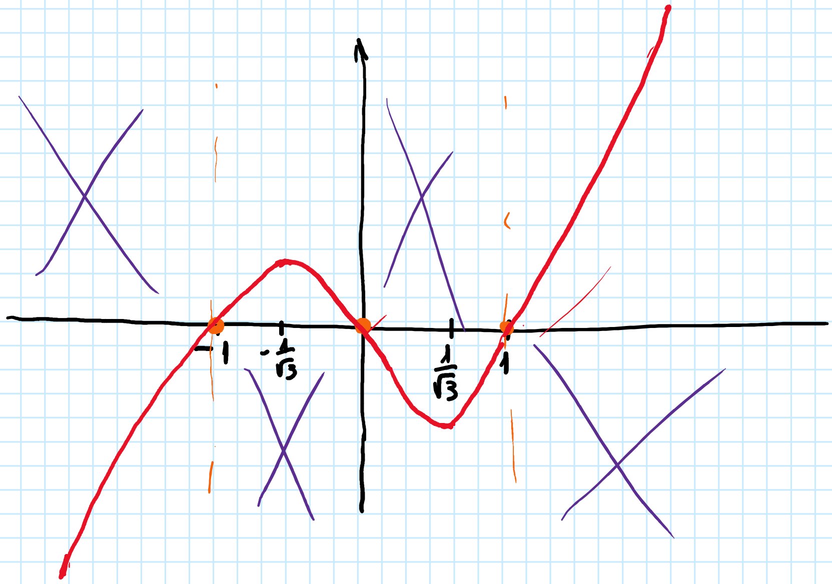
$$3x^2 - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Segno di f'

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}$

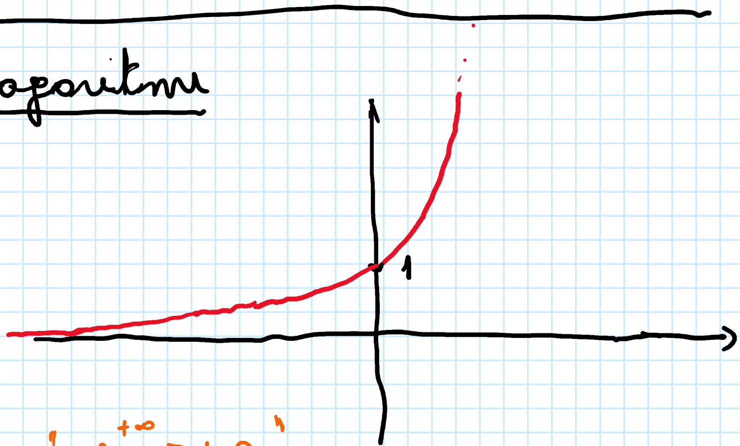
Segno di f'





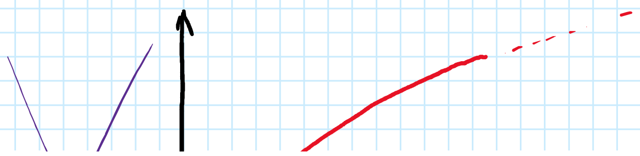
Esponenziali e logaritmi

$$f(x) = e^x$$



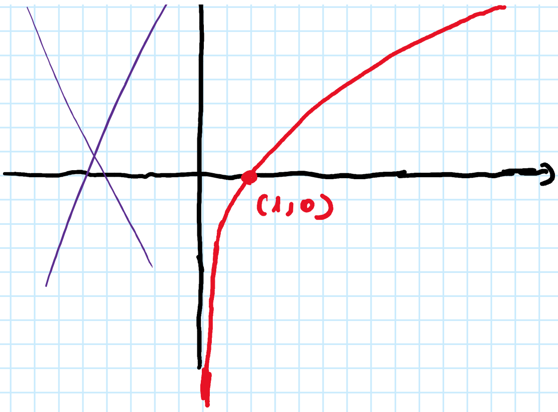
- $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^x = 0 \quad \nexists\, x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ "$e^{+\infty} = +\infty$"
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ "$e^{-\infty} = 0$"
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (f.i. $\frac{+\infty}{+\infty}$ ma e^x cresce di più di x^n)
- $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ (f.i. $\pm\infty \cdot 0$)

$$f(x) = \ln x$$



$D: (0, +\infty)$

$f(x) = \ln x$



$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$\ln x = 0 \iff x = 1$

$\ln x > 0 \iff x > 1$

$\ln x \geq 0 \iff x \geq 1$

$\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$

$\ln x \leq 0 \iff 0 < x \leq 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad (\text{con } n > 0)$$

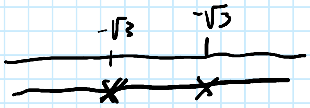
$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \qquad (\text{con } n \in \mathbb{N})$$

$(\text{f.i. } 0 \cdot (-\infty))$

ESERCIZIO

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{3 - x^2}$$

1) Dominio:



$3 - x^2 \neq 0 \iff x \neq \pm\sqrt{3}$

$(3 - x^2 = 0 \iff -x^2 = -3 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3})$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

2) $f(-x) = \dfrac{e^{(-x)^2}}{3 - (-x)^2} = \dfrac{e^{x^2}}{3 - x^2} = f(x)$ $\quad f$ è pari.

3) Asse y:

$f(0) = \dfrac{e^0}{3 - 0} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad (0, \frac{1}{3})$ è intersezione con l'asse y.

Asse x

Asse x

$$\frac{e^{x^2}}{3-x^2}=0 \iff e^{x^2}=0 \qquad \nexists\ x\in\mathbb{R}$$

Non ci sono intersezioni con asse x.

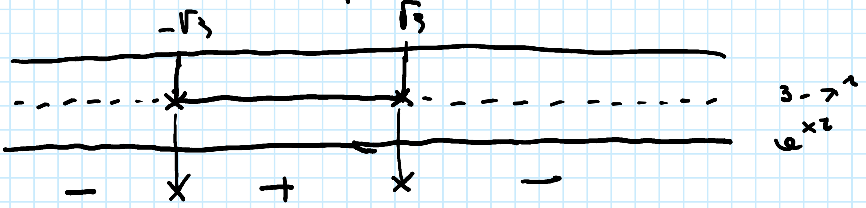
4) Segno

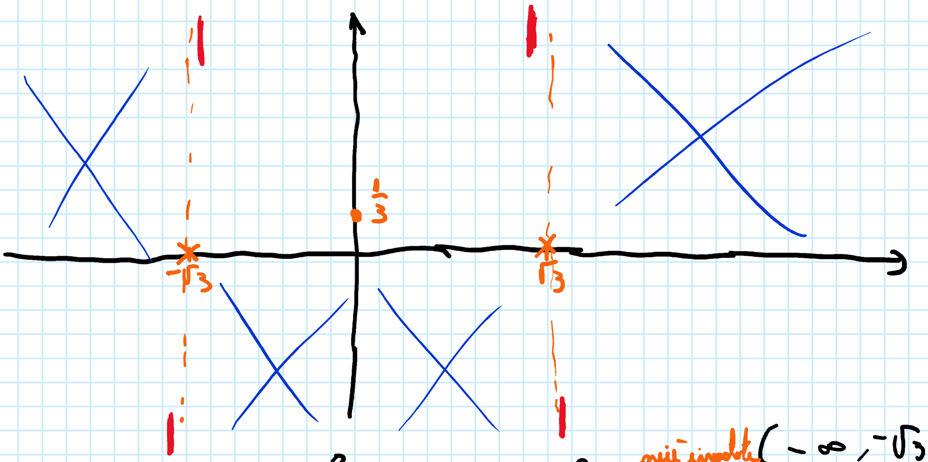
$$\frac{e^{x^2}}{3-x^2}$$

Numeratore: $e^{x^2}\ge 0 \qquad \forall x\in Dom(f)$

Denominatore: $3-x^2>0 \iff -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

Segno della frazione:





più importante $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

• $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}}{3-x^2}=\frac{e^{+\infty}}{-\infty} \quad \frac{+\infty}{-\infty}$ f.i.

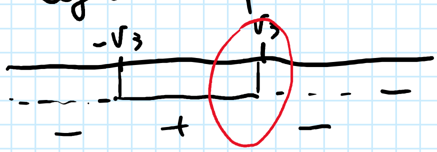
Siccome il numeratore è un esponenziale

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}}{3-x^2}=-\infty$$

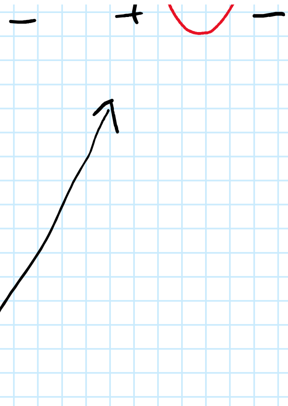
• $\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}}\frac{e^{x^2}}{3-x^2}=\frac{e^3}{0}$

devo guardare i segni

segno di f:



devo guardare i segni



$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{e^{x^2}}{3-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{e^{x^2}}{3-x^2} = +\infty$$

- $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{e^{x^2}}{3-x^2} = \frac{e^3}{0}$ segni

$\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = -\infty$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{3-x^2} = -\infty$ (f.i. $\frac{+\infty}{-\infty}$ ma l'esponenziale domina)

$$f'(x) = \left(\frac{e^{x^2}}{3-x^2} \right) = \frac{e^{x^2} \cdot 2x\,(3-x^2) - e^{x^3}(-2x)}{(3-x^2)^2}$$

$$= \frac{e^{x^2}(6x - 2x^3 + 2x)}{(3-x^2)^2}$$

$$= \frac{e^{x^2}(8x - 2x^3)}{(3-x^2)^2}$$

$$= \frac{2x\, e^{x^2}(4-x^2)}{(3-x^2)^2}$$

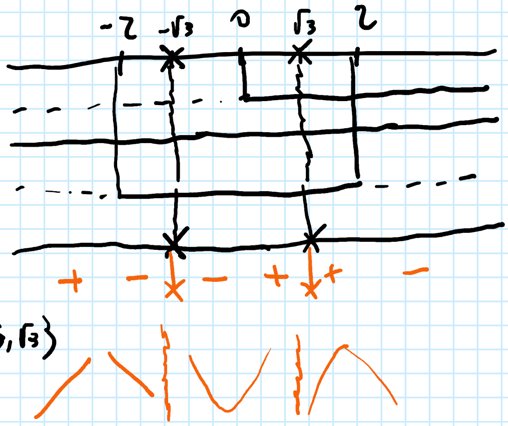
ricordare

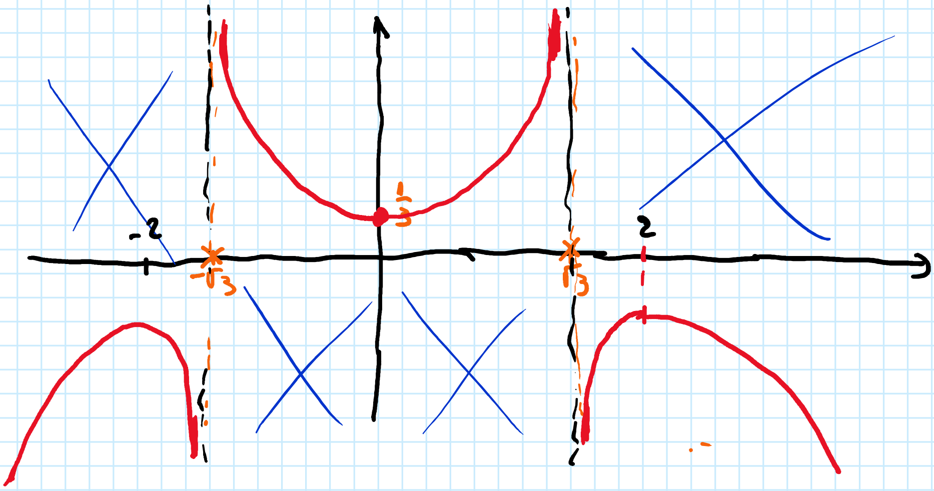
$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\left(\log(f(x)) \right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Segno della derivata:

- $2x \geq 0 \iff x \geq 0$
- $e^{x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $4 - x^2 \geq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$
- $(3-x^2)^2 > 0 \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

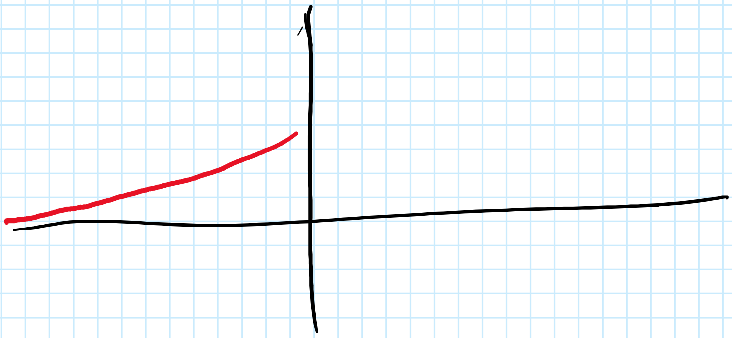




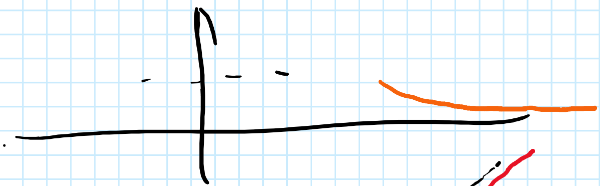
$x = -\sqrt{3}$ e $x = +\sqrt{3}$ sono asintoti verticali

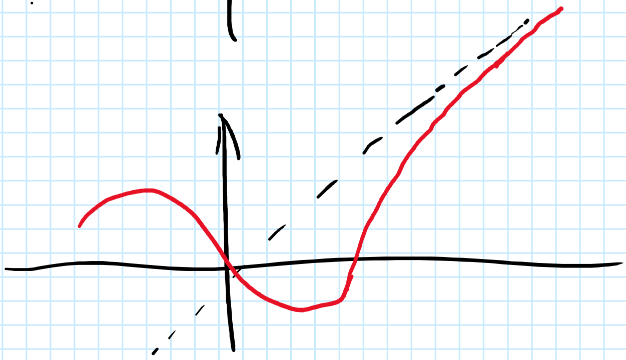
$f(x) = e^x$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^7}{x^4+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$





$$\left(e^{x^7}\right)' = e^{x^7} \cdot 7x^6$$

$$\left(\ln(x^2+1) \right)' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$$

$$\left(\log_{10}(x^2+1) \right)' = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln 10} \right)'$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \, \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \, \frac{2x}{x^2+1}$$