

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{1}{3x-4} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-4| + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

perché

$$\left(\frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \right)'$$

$$= \frac{1}{a} \left(\ln|ax+b| \right)'$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{ax+b} \cdot (ax+b)'$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{ax+b} \cdot a = \frac{1}{ax+b} \quad \checkmark$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x+\frac{b}{a}} dx$$

$$= \frac{1}{a} \ln \left| x + \frac{b}{a} \right| + C$$

$$= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{ax+b}{|a|} \right| + C$$

$$= \frac{1}{a} \ln|ax+b| - \frac{1}{a} \ln|a| + C$$

$$= \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C_2 \quad C_2$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

$$N(x) = mx + q$$

$$D(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\bullet \Delta > 0 \quad \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}$$

- $\Delta > 0$ $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}$

- $\Delta = 0$ $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$

- $\Delta < 0$:

Per trattare questo caso serve sapere tre cose:

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

$$\left(\int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C \right)$$

$$\left(\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C \right)$$

- $\int \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$

Infatti:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\left(\frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \right)' = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1} \cdot \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)'$$

$$= \frac{1}{\beta} \frac{1}{\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2} + 1} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2} + 1} = \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

Dato un polinomio $ax^2 + bx + c$ con $\Delta < 0$.

ci sono due soluzioni complesse di $ax^2 + bx + c$

che sono $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$$= \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} + i \underbrace{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}}_{\beta}$$

Si dimostra che

$$ax^2 + bx + c = a((x-\alpha)^2 + \beta^2)$$

• Procedimento per il caso $\Delta < 0$.

1) Se cerchiamo A e B t.c.

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A D'(x)}{D(x)} + \frac{B}{D(x)}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{N(x)}{D(x)} dx &= A \int \frac{D'(x)}{D(x)} + B \int \frac{1}{D(x)} dx \\ &= A \ln |D(x)| + B \int \frac{1}{D(x)} dx \end{aligned}$$

3) Se scrivere $D(x) = a((x-\alpha)^2 + \beta^2)$ dove $\alpha \pm i\beta$ sono le radici complesse del denom.

Allora

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{D(x)} dx &= \int \frac{1}{a((x-\alpha)^2 + \beta^2)} dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C. \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+2} dx$$

$$x^2+x+2 \quad \Delta = 1-8 = -7 < 0.$$

Derivato del denominatore: $2x+1$

Se cerchiamo A e B t.c.

$$\frac{x+2}{x^2+x+2} = \frac{A(2x+1)}{x^2+x+2} + \frac{B}{x^2+x+2}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= A(2x+1) + B \\ &= 2Ax + A + B \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ A+B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+2} dx$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+x+2| + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+2} dx$$

resto da calcolare
questo.

$$\left(\int \frac{4x+1}{2x^2+x+2} dx = \ln |2x^2+x+2| + C \right)$$

$$\left(\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln |3x+1| + C \right)$$

$$x^2+x+2=0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}_{\beta}$$

$$(\sqrt{-7} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} = i\sqrt{7})$$

$$x^2+x+2 = a((x-\alpha)^2 + \beta^2) = 1 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+2} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \arctan\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Risultato finale:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+2) + \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

ESEMPIO

$$\int \frac{x-3}{x^2+4} dx$$

$$\Delta = 0 - 16 = -16 < 0.$$

$$D(x) = x^2 + 4$$

$$D'(x) = 2x$$

$$\frac{x-3}{x^2+4} = \frac{A \cdot 2x}{x^2+4} + \frac{B}{x^2+4}$$

$$x-3 = 2Ax + B$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2+4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - 3 \underbrace{\int \frac{1}{x^2+4} dx}_{\text{da calcolare}} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2} = \pm \frac{i\sqrt{16}}{2} = \pm i \cdot 2 = 0 \pm 2i$$

$\alpha=0 \quad \beta=2$

$$x^2+4 = x^2+2^2$$

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Risultato finale

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

oss

1) Abbiamo detto che $\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$

In particolare:

$$\int \frac{1}{x^2+\beta^2} dx = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x}{\beta}\right) + C$$

2) Se abbiamo

$$\int \frac{\textcircled{1} \text{ non } 1 \text{ e } x}{ax^2+bx+c} dx \quad \text{con } \Delta < 0$$

In questo caso non sono fore il passaggio A e B. Dirottante

• B. Distanza

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{1}{a((x-d)^2+p^2)} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-d)^2+p^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p} \arctan\left(\frac{x-d}{p}\right) + C$$

ESEMPIO

$$\int \frac{1}{x^2-x+1} dx$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

Se il discriminante Δ è negativo, al numeratore non serve cercare A e B:

$$x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_a^2 \pm i \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_b$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{(x-d)^2+p^2} = \frac{1}{p} \arctan\left(\frac{x-d}{p}\right) + C$$

$$p = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

ESERCIZIO

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx$$

$$D(x) = x^2 + 2x + 5$$

$$D'(x) = 2x + 2$$

$$\frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{A(2x+2)}{x^2+2x+5} + \frac{B}{x^2+2x+5}$$

$$x = 2Ax + 2A + B$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx}_{\text{da calcolare}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$\alpha = -1$ $\beta = 2$

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 2^2$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2^2} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Risultato finale

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Integrali definiti:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Per calcolare questo integrale:

- Si calcola $\int f(x) dx = F(x) + C$

- $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ESEMPIO

$$\int_1^2 x dx$$

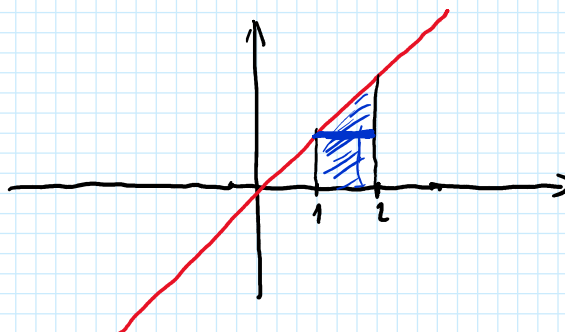
$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x dx &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{2} 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

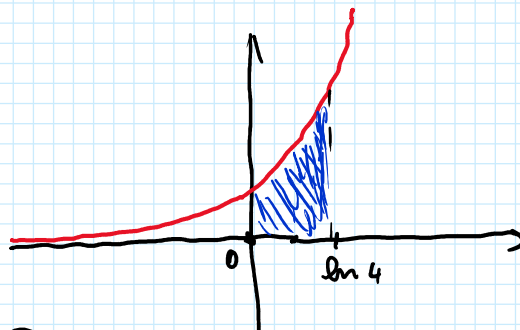
$$\int_a^b f(x) dx$$

rappresenta l'area con segno sotto
il grafico della funzione:

$$\int_1^2 x dx$$



$$\int_0^{\ln 4} e^x dx$$



$$\int e^x dx = \underbrace{e^x}_{F(x)} + C$$

$$\int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3$$

$$\int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3$$

TIPICO ESERCIZIO

a) $\int \frac{x}{x^2 + 3x - 4} dx$

b) Calcolare $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x - 4} dx$

a) Risultato $\tilde{=} \frac{1}{5} \ln |x-1| + \frac{4}{5} \ln |x+4| + C$

b) Bisogna fare una sostituzione

$$\int \underbrace{f(\underbrace{\varphi(x)}_y)} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{dy} dx$$

$$= \int f(y) dy$$

si può sostituire

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ dy &= \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

Se abbiamo un integrale definito

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy$$

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x - 4} dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x - 4} dx$$

Sostituzione

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ dy &= (e^x)' dx = e^x dx \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{\underbrace{e^x}_y \cdot \underbrace{e^x}_{dy}}{e^{2x} + 3e^x - 4} dx$$

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ x=1 &\Rightarrow y = e^1 = e \end{aligned}$$

$$\int_1^e \frac{e^x \cdot e^x}{\underbrace{e^{2x}}_{y^2} + 3\underbrace{e^x}_y - 4} dx$$

$$y = e^x$$

$$x=1 \Rightarrow y = e^1 = e$$

$$x=2 \Rightarrow y = e^2$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{y}{y^2 + 3y - 4} dy$$

$$= \frac{1}{5} \ln|y-1| + \frac{4}{5} \ln|y+4| \Big|_e^{e^2}$$

$$= \frac{1}{5} \ln|e^2-1| + \frac{4}{5} \ln|e^2+4| - \frac{1}{5} \ln(e-1) - \frac{4}{5} \ln(e+4) \quad \checkmark$$

e) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$

b) $\int_0^2 \frac{x^3-x}{x^4+x^2+1} dx$

c) $y = x^2$
 $dy = (x^2)' dx = 2x dx$
 $x=0 \Rightarrow y=0^2=0$
 $x=2 \Rightarrow y=4$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^3-x}{x^4+x^2+1} dx &= \int_0^2 \frac{x(x^2-1)}{(x^2)^2+x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\underbrace{2x}_{dy} (x^2-1)}{(x^2)^2+x^2+1} \underbrace{dx}_{dy} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2-1}{(x^2)^2+x^2+1} \underbrace{2x \cdot dx}_{dy} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{y-1}{y^2+y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} F(y) \Big|_0^4 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[F(y) \right]_0^4$$

multisto del punto 1.

$$\int_{-27}^{\frac{1}{8}} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{(2\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt[3]{x} - 4)\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\int \frac{1 + 2x}{2x^2 + 5x - 4} dx$$

- $y = \sqrt[3]{x}$
- $dy = (\sqrt[3]{x})' dx$
 $= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{x})' &= (x^{\frac{1}{3}})' \\ &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

- $x = \frac{1}{8} \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$
- $x = -27 \quad y = \sqrt[3]{-27} = -3$

$$\int_{-27}^{\frac{1}{8}} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{(2\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt[3]{x} - 4)\sqrt[3]{x^2}} dx = 3 \int_{-3}^{\frac{1}{2}} \frac{1 + 2y}{(2y^2 + 5y - 4)\sqrt[3]{x^2}} dy$$

$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$
dy

$$= 3 \int_{-3}^{\frac{1}{2}} \frac{1 + 2y}{2y^2 + 5y - 4} dy$$

ESEMPLO :

$$\int_e^{e^3} \frac{\ln x - 1}{x(\ln^2 x + \ln x + 1)} dx = \int_1^3 \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x + \ln x + 1} \frac{1}{x} dx$$

$$y = \ln x$$

$$dy = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

$$x = e \Rightarrow y = \ln e = 1$$

$$x = e^3 \Rightarrow y = \ln e^3 = 3$$

$$= \int_1^3 \frac{y-1}{y^2+y+1} dy.$$

Equazioni differenziali:

È un'equazione in cui compare una funzione incognita $y(x)$ e alcune delle derivate di $y(x)$.

ESEMPIO

$$y' = y^2 \sin x$$

$y = y(x)$ incognita da trovare.

$$\frac{y'}{y^2} = \sin x$$

$$\left(-\frac{1}{y}\right)' = \sin x$$

$$-\frac{1}{y} = \int \sin x \, dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + C$$

$$\frac{1}{y} = \cos x - C$$

$$y = \frac{1}{\cos x - C}$$

(infinita soluzioni, una per ogni valore di C)

L'insieme delle soluzioni è detto
SOLUZIONE GENERALE o INTEGRALE GENERALE

Tipico esercizio di esame:

Trovare la soluzione generale di un'equazione differenziale del tipo

$$a y'' + b y' + c y = g(x)$$

Caso semplice: $g(x) = 0$.

Cosa semplice: $g(x) = 0$.

$$a y'' + b y' + c y = 0 \quad (\text{equazioni omogenee})$$

• Se considero il polinomio

$$p(t) = a t^2 + b t + c$$

Si calcola il $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$1) \text{ Se } \Delta > 0 \quad \left(\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } p(t_1) = p(t_2) = 0 \right)$$
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La soluzione generale dell'eq. omogenea è
del tipo:

$$y(x) = C_1 e^{t_1 x} + C_2 e^{t_2 x}$$

$$2) \text{ Se } \Delta = 0 \quad (\exists! t_1 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } p(t_1) = 0)$$

La sol. generale dell'eq. omogenea è

$$y(x) = C_1 e^{t_1 x} + C_2 e^{t_1 x} x$$

3) Se $\Delta < 0$, l'eq. $p(t) = 0$ ha due soluzioni
complesse $\alpha \pm i\beta$. La soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ESEMPLO

$$2 y'' + 17 y' - 9 y = 0$$

$$p(t) = 2t^2 + 17t - 9$$

$$\Delta = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-17 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

La soluzione è

$$y(x) = C_1 e^{1 \cdot x} + C_2 e^{-\frac{9}{2} x}$$

$$y(x) = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x/2}$$

$$= C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x/2}$$

ESEMPIO

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$p(t) = t^2 + 2t + 1 \quad \Delta = 0$$

$$t_1 = \frac{-2}{2} = -1$$

Le soluzioni sono

$$y(x) = C_1 e^{-1 \cdot x} + C_2 e^{-1 \cdot x} \cdot x$$

$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} x$$

ESEMPIO

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$p(t) = t^2 + 2t + 5$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm i4}{2} = -1 \pm 2i$$

$$y(x) = C_1 e^{-1 \cdot x} \cos(2x) + C_2 e^{-1 \cdot x} \sin(2x)$$

$$= C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x)$$

$\alpha = -1 \quad \beta = 2$

Equazioni non omogenee:

$$a y'' + b y' + c y = g(x)$$

Il procedimento è il seguente:

- 1) Si considera l'equazione omogenea associata

- 1) Si considera l'equazione omogenea associata a quella da risolvere $y'' + by' + cy = 0$.
Si trovano le soluzioni $y_0(x)$.
- 2) Si cerca una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ dell'eq. non omogenea. Se $p(x)$ è un polinomio quasi sempre $\bar{y}(x)$ è un polinomio dello stesso grado.
- 3) La soluzione generale dell'equazione non omogenea è
 $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$.

ESEMPIO

$$2y'' - y' - 6y = x + 1$$

1) Considero $2y'' - y' - 6y = 0$

$$p(t) = 2t^2 - t - 6$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x}$$

- 2) Dobbiamo cercare una soluzione $\bar{y}(x)$
 $g(x) = x + 1$ è un pol. di 1° grado
 Anche $\bar{y}$ sarà un pol. di 1° grado

$$\bar{y}(x) = A x + B \quad \text{con } A \text{ e } B \text{ da determinare.}$$

$$\bar{y}'(x) = A$$

$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$2y'' - y' - 6y = x + 1$$

$$0 - A - 6(Ax + B) = x + 1$$

$$y'(x) = 0$$

$$2 \cdot 0 - A - 6(Ax + B) = x + 1$$

$$-A - 6Ax - 6B = x + 1$$

$$-6Ax - A - 6B = x + 1$$

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ -A - 6B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} - 6B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{5}{36} \end{cases}$$

Quindi: $\bar{y}(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{36} (Ax + B)$

3) La soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$$



—

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$$\bar{y}''(x) = 2A$$