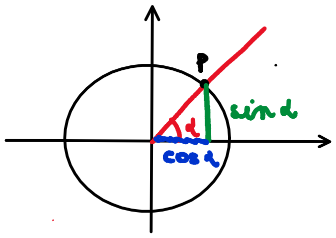
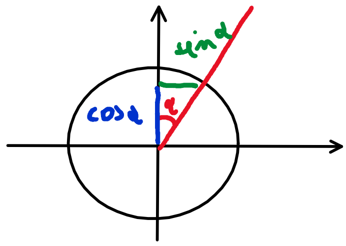
LABORATORIO DI MATEMATICA 3

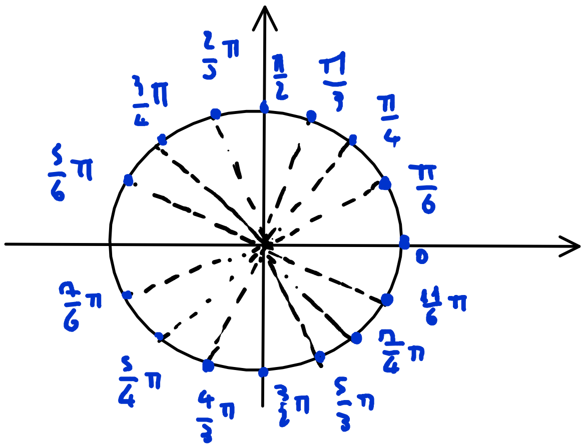
venerdì 7 febbraio 2025 14:08

Valori di seno e coseno

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	0	1
$\frac{2}{3}\pi$ (120°)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$ (135°)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$ (150°)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$







Numeri complessi

$z = \underbrace{x}_{} + i\underbrace{y}_{}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ (FORMA ALGEBRICA)

x PARTE REALE

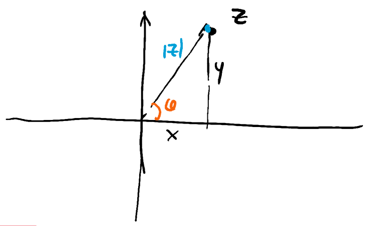
y PARTE IMMAGINARIA

Relazione con modulo e argomento:

Triangolo rettangolo:

$x = |z| \cos\theta$

$y = |z| \sin\theta$



In particolare:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{x}{|z|} \quad e \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}}$$

FORMULE PER TROVARE L'ARGOMENTO

ESEMPIO

$z = 1 + i$ $\qquad x = 1, \quad y = 1$

Calcolare $|z|$ e θ:

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Per trovare φ:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{(dalla tabella)}$$

Tipiche domande di esame:

- Dato $z \in \mathbb{C}$ calcolare una potenza di z.
- Dato $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ trovare tutti i numeri complessi che elevati alla n danno z (radici n-esime complesse di z).

FORMULA PER LE POTENZE

Dato z, supponiamo di conoscere $|z|$ e $\varphi = \arg(z)$.
Allora $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{z^n = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right)}$$

ESEMPIO

Calcolare $(1+i)^8$ $\quad (n = 8,\ z = 1+i)$

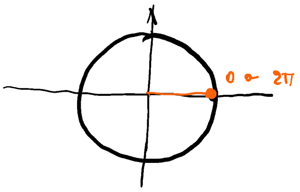
$z = 1+i \qquad |z| = \sqrt{2} \quad e \quad \arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$$(1+i)^8 = z^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Ma: $(\sqrt{2})^8 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 8} = 2^4 = 16$

$\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\pi) = 1$

$\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sin(2\pi) = 0$



Quindi:

$$z^8 = 16\,(1 + i\cdot 0) = 16$$

FORMULA PER LE RADICI n-ESIME COMPLESSE

Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora le radici n-esime complesse di z sono i numeri della forma:

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{con}$$
$$k=0,1,\dots,n-1$$

ESERCIZIO

Sia $z=\dfrac{6+7i}{1+2i}$

1) Scrivere z in forma in forma algebrica
2) Calcolare $(z-3)^9$

---

1) $$z=\frac{6+7i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{6+7i-12i-14i^2}{1^2-(2i)^2}$$
$$=\frac{6+14+7i-12i}{1-(-4)}=\frac{20-5i}{5}=4-i$$

2) $z-3=4-i-3=1-i$

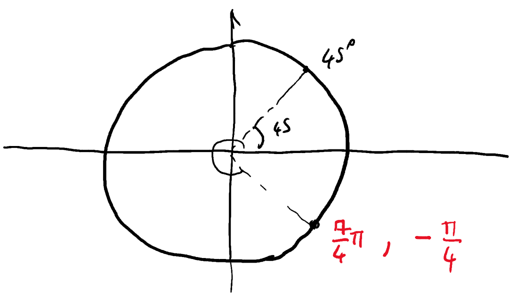
Per calcolare $(z-3)^9=(1-i)^9$ dobbiamo cercare $|z-3|$ e $\arg(z-3)$

Modulo: $z-3=1-i \qquad x=1,\ y=-1$

$$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

Argomento:

$$\cos\varphi=\frac{x}{|z|}=\frac{1}{\sqrt2} \qquad \sin\varphi=\frac{y}{|z|}=-\frac{1}{\sqrt2}$$



$$\varphi=315°=\frac{7}{4}\pi \ \text{o}\ -\frac{\pi}{4}$$

$z=4-i$

$z-3=4-i-3=1-i$

$$(z-3)^9=(\sqrt2)^9\left(\cos(9\varphi)+i\sin(9\varphi)\right)$$
$$=(\sqrt2)^9\left(\cos\left(-\tfrac{9}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\tfrac{9}{4}\pi\right)\right)$$
$$=16\sqrt2\left(\cos\left(-\tfrac{9}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\tfrac{9}{4}\pi\right)\right)$$

$$= 16\sqrt{2}\left(\cos\left(-2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

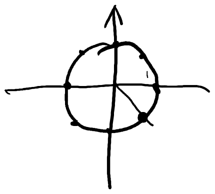
$$= 16 - i \cdot 16 = 16 - 16i.$$

Note:

- $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$

  $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

  $-\frac{9}{4}\pi = -2\pi - \frac{\pi}{4}$



Quindi $\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

- $\frac{63}{4}\pi = 15\pi + \frac{3}{4}\pi = 16\pi - \frac{\pi}{4}$

  Quindi $\cos\left(\frac{63}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

  $\sin\left(\frac{63}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ESERCIZIO

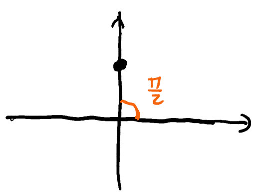
Sia $z = \dfrac{2i-3}{2+3i}$

1) Scrivere la forma algebrica di z.
2) Calcolare le radici cubiche di z.

1) $z = \dfrac{2i-3}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{4i \cancel{-6} - \overset{+6}{\cancel{6i^2}} + 9i}{4-(3i)^2}$

$= \dfrac{13i}{13} = i$

2) $z = i$ $\qquad x = 0 \qquad y = 1$



$|z| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{0}{1} = 0 \qquad \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1.$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

Radici cubiche:

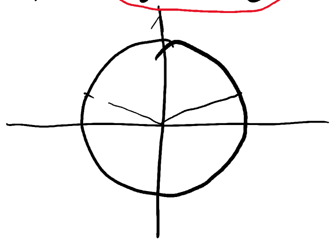
$$\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k=0,1,2$$

$$\sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k=0,1,2$$

$$\frac{\pi+4k\pi}{6}$$

- $k=0$

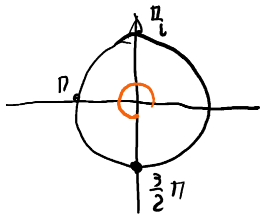
$$1\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=1\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$



- $k=1$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+i\,\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$



- $k=2$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\,\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$0-i=-i$$

Motivazione per la formula:

$$z=x+iy$$

Sappiamo che $x=|z|\cos\varphi=|z|\cos(\varphi+2k\pi)$

$y=|z|\cos\varphi=|z|\sin(\varphi+2k\pi)$

Quindi

$$z=|z|\left(\cos(\varphi+2k\pi)+i\,\sin(\varphi+2k\pi)\right)$$

Quando cerchiamo le radici cubiche vogliamo trovare i numeri w tali che $w^3=z$.

Si può scrivere $w=|w|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

Allora $w^3=|w|^3(\cos(3\alpha)+i\,\sin(3\alpha))$

Quindi vogliamo che:

$$\begin{cases}|w|^3=|z|\\ 3\alpha=\varphi+2k\pi\end{cases} \iff \begin{cases}|w|=\sqrt[3]{|z|}\\ \alpha=\dfrac{\varphi+2k\pi}{3}\end{cases}$$

Quindi:

$$w = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Si vede però che basta prendere $k = 0, 1, 2$.

- $k = 0$ $\quad \frac{\varphi}{3}$
- $k = 1$ $\quad \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}$
- $k = 2$ $\quad \frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}$
- $k = 3$ $\quad \frac{\varphi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{\varphi}{3} + 2\pi$
- $k = 4$ $\quad \frac{\varphi}{3} + \frac{8\pi}{3} = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi$

Basta prendere $k = 0, 1, 2$.

Calcolo di limiti

Come si calcola $\lim_{x \to x_0} f(x)$?

- In molti casi (se $x_0 \in \mathbb{R}$) il limite si può calcolare sostituendo.

$$\lim_{x \to 2} \frac{4 + \frac{1}{x}}{x + 3} = \frac{4 + \frac{1}{2}}{2 + 3} = \frac{4 + \frac{1}{2}}{5} = \frac{\frac{8+1}{2}}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{5} = \frac{9}{10}$$

Ci sono però situazioni più complicate:

- Calcolare $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{1 - 2 + 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$?

Alcune situazioni standard:

1) Limiti di rapporti tra polinomi per $x \to \pm\infty$

Per questi limiti basta calcolare il rapporto tra i termini di grado massimo.

ESEMPI

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^4}{x^2+1+2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{11x^4 + x^7}{3x^7+x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^7}}{3\cancel{x^7}} = \frac{1}{3}$$

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6+x^5}{1-x^6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6}{-x^6} = -1$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{1+x^4+x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6}{1+x^4+x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6}{x^5} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+1}{x^5+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x^3} = 0$$

Alcune regole da ricordare

- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0$
- Se $n \in \mathbb{N}$: $(+\infty)^n = +\infty$
- Se $n \in \mathbb{N}$ $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

ESEMPI

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{x^4+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^{\overset{\text{dispari}}{3}} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{x^5+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{x^5} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

2) Limiti di rapporti tra polinomi per $x \to 0$

In questi limiti contano le potenze più basse

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x^7 + x^2}{x^2 + x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \overbrace{(x^5+1)}^{\to 1}}{x^2 \underbrace{(1+x^3)}_{\to 1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4 + 1 + x^2}$$ $\qquad 1 = x^0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{1} = 0$$

Altre regole utili da ricordare:

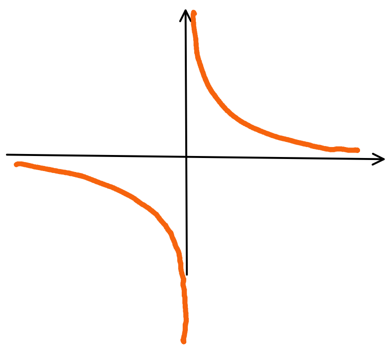
- $\frac{0}{a} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\frac{1}{0}$ in questo caso bisogna fare attenzione ai segni. Ad esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \frac{1}{0^+} = +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \nexists & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

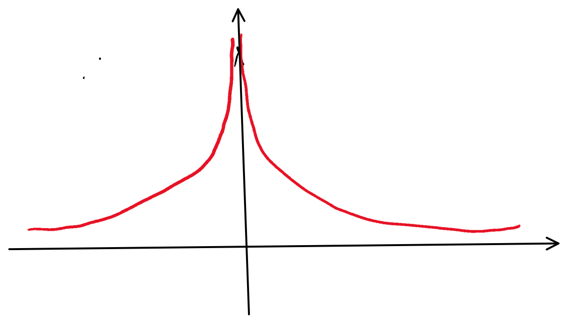
ESEMPIO

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \nexists$ perché $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



Ricordare: Quando in un limite troviamo $\frac{1}{0}$ bisogna guardare il segno del denominatore.

Nel caso $\frac{1}{x^n}$:

- Se n è pari: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Se n è dispari: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$ (non esiste)

  In questo caso si scrive che

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty .$$

ESEMPI

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^5}{x^6 - 2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{-2x^3} = \lim_{x\to 0} \cdot \frac{x}{-2} = 0$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^5}{x^7 - 3x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{-3x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-3x^2}$$

  $$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{+\infty} = -\frac{1}{3} \cdot (+\infty) = -\infty$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^6 + 2x^{10}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists \quad \text{perché}$$

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^7}{x^{12} - x^{10}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^7}{-x^{10}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^3}$$

  $$= -\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}}_{+\infty} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{-2x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\cdot(-\infty) = -\infty$$

Nella prossima lezione vedremo i limiti con i polinomi di Taylor.

Idea: Nei limiti per $x \to 0$ si possono approssimare alcune funzioni con polinomi.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = ?$$

Si può approssimare e^x con un polinomio:

Vedremo che $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + E(x)$ dove $E(x)$ è un errore trascurabile rispetto a x^2.

Quindi $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + E(x) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + E(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} + \frac{E(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

trascurabile