LABORATORIO DI MATEMATICA

martedì 4 febbraio 2025 09:08

Disequazioni con valore assoluto

Tipico esercizio di esame:

$$\frac{|2x-1| - 2}{x-5} \geq 0$$

Per risolverlo serve sapere:

1) Risolvere eq. / diseq. polinomiali di 1° grado
2) Unire / intersecare soluzioni
3) Studio del segno di una frazione (o di un prodotto)
4) Risolvere diseq. con valore assoluto

---

1) Facile; basta ricordare che quando si divide per un numero negativo va modificato il verso della disequazione

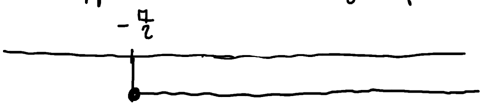
ESEMPI

- $2x + 7 \geq 0$

  $2x \geq -7$

  $x \geq -\frac{7}{2}$

Rappresentazione grafica della soluzione:



- $5 - 3x < 0$

  $-5 + 3x > 0$

  $3x > +5$

  $x > \frac{5}{3}$

$5 - 3x < 0$	$5 - 3x < 0$	$-3x < -5$
$-5 + 3x > 0$	$5 < 3x$	$3x > 5$
$3x > +5$	$\frac{5}{3} < x$	$x > \frac{5}{3}$
$x > \frac{5}{3}$	$x > \frac{5}{3}$	

Rappresentazione grafica delle soluzioni:

- $1 - 3x > 0$

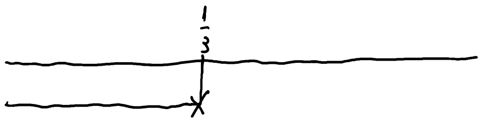
  $1 > 3x$

  $\frac{1}{3} > x$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} > x$

$x < \frac{1}{3}$



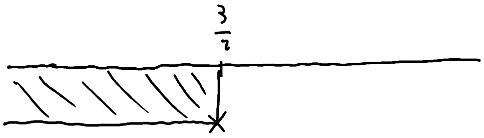
- $x(x+1) < x(2x-1) - x^2 + 3$

$x^2 + x < 2x^2 - x - x^2 + 3$

$\cancel{x^2} + x < \cancel{x^2} - x + 3$

$2x < 3$

$x < \frac{3}{2}$



---

2) Unione o intersezione di soluzioni

Unione: $2x - 1 \geq 0 \lor 3x + 1 < 0$

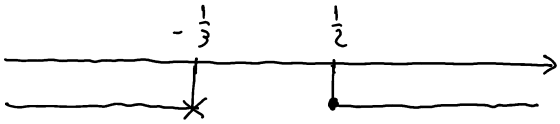
si risolvono le due disequazioni e si uniscono le soluzioni

$2x \geq 1 \quad \lor \quad 3x + 1 < 0$

$x \geq \frac{1}{2} \quad\quad 3x < -1$

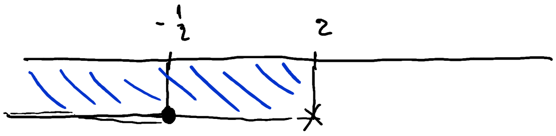
$x < -\frac{1}{3}$

$x \geq \frac{1}{2} \lor x < -\frac{1}{3}$



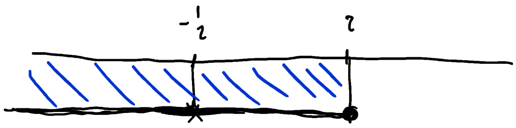
(graficamente, le due sol. si rappresentano sullo stesso riga)

- $x < 2 \lor x \leq -\frac{1}{2}$



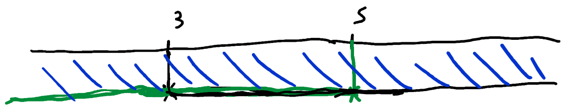
Soluzione $x < 2$.

- $x \leq 2 \lor x < -\frac{1}{2}$



$x \leq 2$

• $x > 3 \quad \lor \quad x < 5$



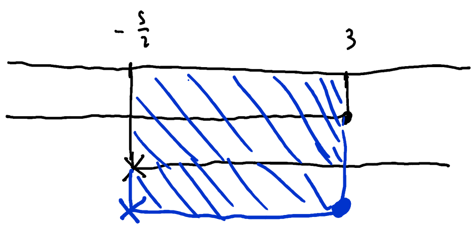
Ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione.

Intersezione di soluzioni (sistemi):

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases}$$

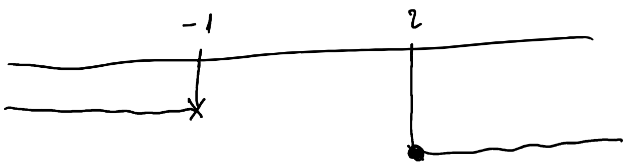
Si risolvono le due disuguaglianze. Si rappresentano le soluzioni su righe diverse e si prendono solo le regioni comuni a entrambe le soluzioni.

• $\begin{cases} x \leq 3 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases}$



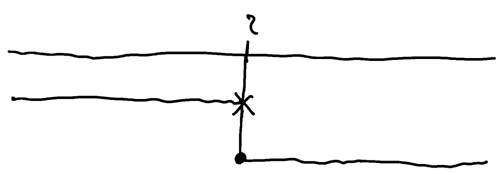
Soluzione : $-\frac{5}{2} < x \leq 3$.

• $\begin{cases} x < -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$



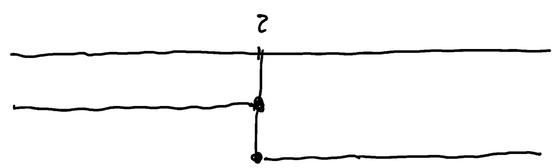
Non ci sono soluzioni.

• $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \end{cases}$



Non ci sono soluzioni

• $\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases}$



$x = 2$ è unica soluzione.

3) Studio del segno

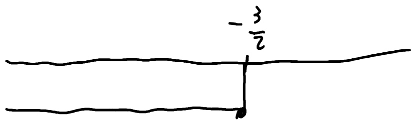
• Di un polinomio di 1° grado

$2x + 3$

Per rappresentare il segno di un polinomio bisogna prima capire dove è ≥ 0.

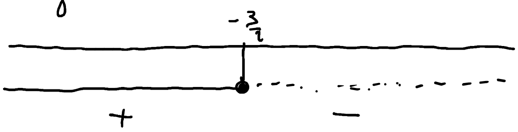
$2x + 3 \geq 0$

$x \geq -\frac{3}{2}$



soluzione di $2x+3 \geq 0$

segno di $2x+3$:



Le regioni che non sono soluzioni di $2x+3 \geq 0$ si rappresentano con una linea tratteggiata.

• Prodotti o rapporti di polinomi

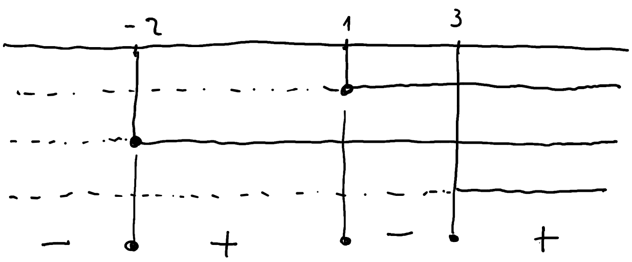
$(x-3)(x+2)(x-1)$

rappresentiamo il segno:

$x-1$: $\quad x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$

$x+2$: $\quad x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$

$x-3$: $\quad x-3 \geq 0 \iff x \geq 3$

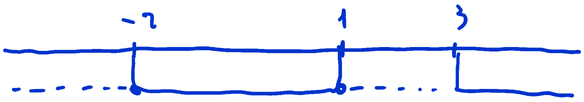


segno di $x-1$

segno di $x+2$

segno di $x-3$

] segno di $(x-3)(x+2)(x-1)$



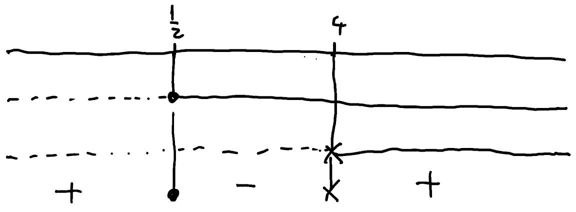
- La stessa regola si usa per i rapporti tra polinomi. L'unica differenza è che i denominatori non possono essere 0.

Consideriamo la frazione $\dfrac{2x-1}{x-4}$

Studiamo il segno della frazione:

Numeratore: $2x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$

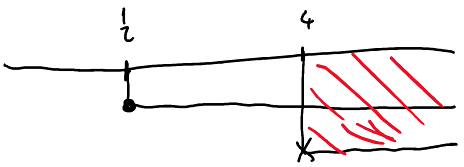
Denominatore: $x-4 > 0 \iff x > 4$



Attenzione a non confondere lo studio del segno con l'intersezione di soluzioni

- Nello studio del segno si usa la disuguaglianza $\geq$ (o $>$ al denominatore). Nella rappresentazione grafica vanno rappresentate anche le regioni tratteggiate.
- Nell'intersezione di soluzioni non si usano le linee tratteggiate ma si rappresentano solo le soluzioni delle disuguaglianze del sistema:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x > 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > 4 \end{cases}$$



Soluzione: $x > 4$.

Lo studio del segno serve a risolvere disequazioni con prodotti o rapporti di polinomi

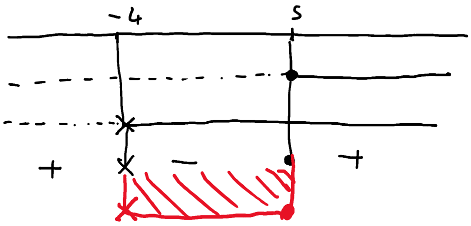
ESEMPIO: Risolviamo:

$$\frac{x-5}{x+4} \leq 0$$

Studio il segno di $\frac{x-5}{x+4}$

$x-5 \geq 0 \iff x \geq 5$

$x+4 > 0 \iff x > -4$



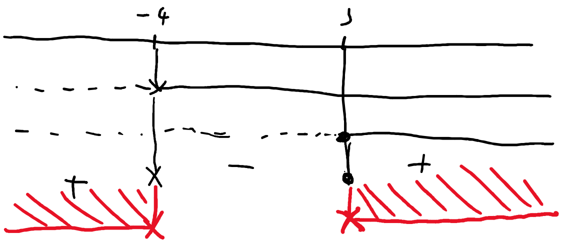
$-4 < x \leq 5$

$\longrightarrow$ una volta trovato questo ci ricordiamo che dobbiamo risolvere $\frac{x-5}{x+4} \leq 0$

ESEMPIO.

$$\frac{x-5}{x+4} > 0$$

Studio del segno di $\frac{x-5}{x+4}$



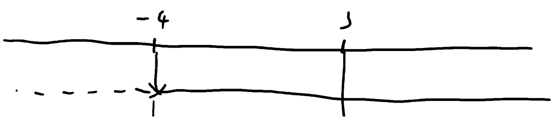
$x < -4 \quad \vee \quad x > 5$

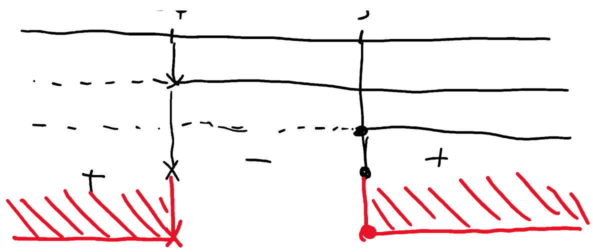
devo risolvere la disuguaglianza con il $>$

ESEMPIO:

$$\frac{x-5}{x+4} \geq 0$$

studio del segno:





disuguaglianze da risolvere;

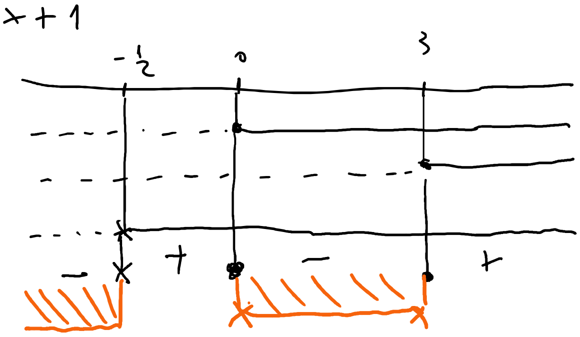
Soluzione: $x < -4 \quad \vee \quad x \geq 5$.

ESEMPIO

$$\frac{x\,(x-3)}{2x+1} < 0$$

Studio il segno di: $\dfrac{x\,(x-3)}{2x+1}$

- $x \geq 0$
- $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$
- $2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$



Adesso prendo < 0 :

$x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 0 < x < 3$.

---

4) Valore assoluto:

Per definizione:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Più in generale:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Consideriamo una disequazione del tipo

$$|f(x)| \;\begin{matrix} \geq \\ < \\ > \\ \leq \end{matrix}\; g(x)$$

$<$

$>$

$\leq$

$\geq$

La disequazione equivale a :

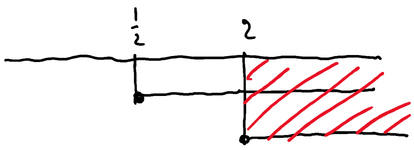
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$|2x - 1| \geq 3$$

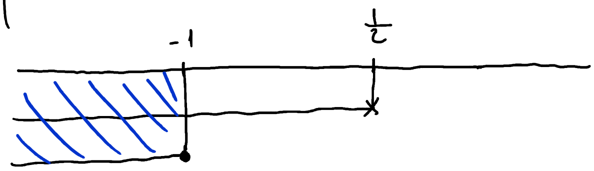
$$\underset{①}{\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 3 \end{cases}} \quad \vee \quad \underset{②}{\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ -(2x-1) \geq 3 \end{cases}}$$

① $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x \geq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$



$x \geq 2$

② $\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \leq -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 2x \leq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \leq -1 \end{cases}$



$x \leq -1$

Soluzioni : ① $\vee$ ②

$x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -1.$

ESEMPIO :

$$\frac{|2x-1| - 2}{x - 5} \geq 0$$

Studio il segno di: $\underline{|2x - 1| - 2}$

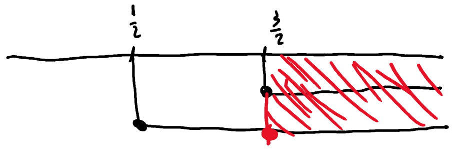
Studio il segno di $\dfrac{|2x-1|-2}{x-5}$

- **Denominatore:** $x-5>0 \iff x>5$
- **Numeratore:**

$|2x-1|-2 \geq 0$

① $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1-2 \geq 0 \end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases} 2x-1<0 \\ -(2x-1)-2 \geq 0 \end{cases}$ ②

$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$



$x \geq \frac{3}{2}$

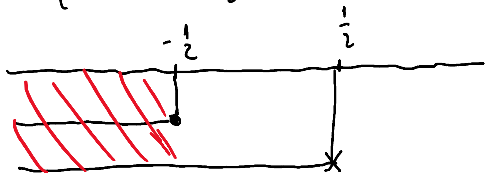
$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -2x+1-2 \geq 0 \quad * \end{cases}$

$* \quad -2x-1 \geq 0$

$-2x \geq 1$

$x \leq -\frac{1}{2}$

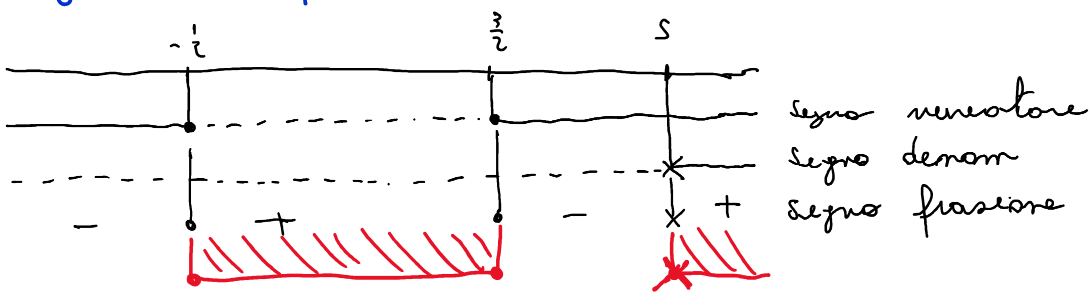
$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$



$x \leq -\frac{1}{2}$

$x \geq \frac{3}{2} \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{2}$

Segno della frazione



Soluzione finale: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \vee \quad x > 5$

ESERCIZI

1) $$\frac{|3x-1|-2}{x-3} \geq 0$$

2) $$\frac{1-|2x-3|}{x-9} \leq 0$$

3) $$\frac{|x-2|}{x-3} \geq 2$$

4) $$\frac{x-3}{|2x-1|-x} > 0$$

Soluzioni degli esercizi:

1) $$\frac{|3x-1|-2}{x-3} \geq 0$$

• Numeratore:

$$|3x-1|-2 \geq 0$$

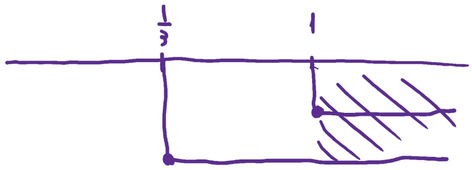
$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 3x-1-2 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x-1<0 \\ -(3x-1)-2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 3x-3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ -3x+1-2 \geq 0 \end{cases}$$

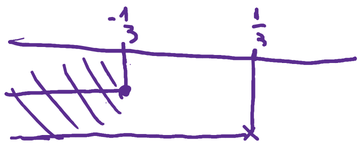
$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ -3x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ -3x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$



$x \geq 1$

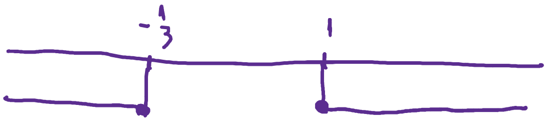


$x \leq -\frac{1}{3}$

Numeratore $x \geq 1 \ \vee \ x \leq -\frac{1}{3}$

$x \leq -\frac{1}{3}$

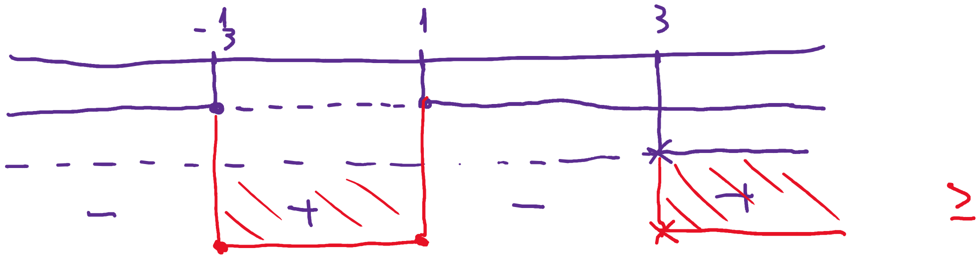
Numeratore $\quad x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{3}$



- Denominatore:

$x - 3 > 0 \iff x > 3$

- Studio del segno:



Soluzione: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \vee \quad x > 3$

2) $\dfrac{1 - |2x - 3|}{x - 9} \leq 0$

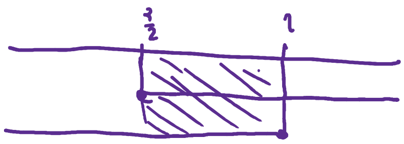
- Numeratore:

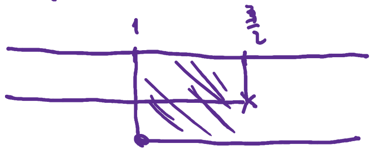
$1 - |2x - 3| \geq 0$

$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 1 - (2x - 3) \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 1 + (2x - 3) \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 4 - 2x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 2x - 2 \geq 0 \end{cases}$

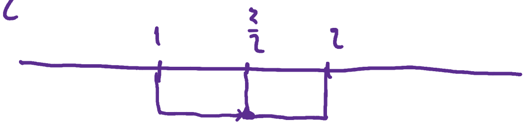
$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$





$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \qquad 1 \leq x < \frac{3}{2}$

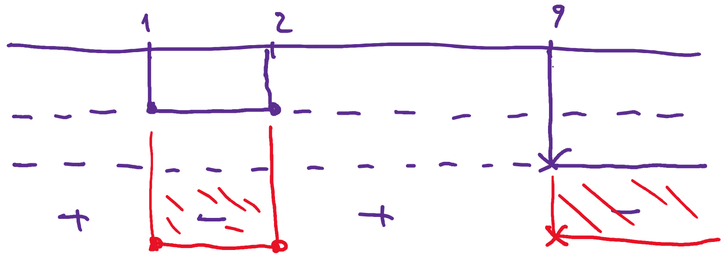
$\frac{3}{2} \le x \le 2 \quad \vee \quad 1 \le x < \frac{3}{2}$



$1 \le x \le 2$

Denominatore: $x - 9 > 0 \Leftrightarrow x > 9$

Studio del segno:



$\le$

$1 \le x \le 2 \quad \vee \quad x > 9$

Le soluzioni degli esercizi 3 e 4 sono disponibili nella prossima lezione