

Esercizi - Numeri Complessi

Esercizio 1. Determinare parte reale, parte immaginaria, coniugato, modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

1. $z = \frac{2-i}{3+i}$

2. $z = \frac{5i-1}{2+3i}$

3. $z = (1-i)^4$

4. $z = \frac{(1-i)(2+i)}{3+i}$

5. $z = \frac{(1-i)(1+i)^5}{1+\sqrt{3}i}$

Esercizio 2. Si consideri il numero complesso $z = \frac{5+3i}{4-i}$.

1. Scrivere la forma algebrica di z .
2. Calcolare z^9 .

Esercizio 3. Si consideri il numero complesso $z = \frac{5+3i}{1+i}$.

1. Determinare la forma algebrica di z .
2. Determinare il modulo e l'argomento di $(z-3)^{13}$.

Esercizio 4. Si consideri il numero complesso $z = \frac{10\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+4i}$.

1. Scrivere la forma algebrica di z .
2. Scrivere in forma algebrica le radici quadrate di z .

Esercizio 5. Si consideri il numero complesso $z = \frac{4+2i}{i-3}$.

1. Scrivere la forma trigonometrica di z .
2. Scrivere in forma esponenziale le radici cubiche di z .

Esercizio 6. Si consideri il numero complesso $z = \frac{8i - 1}{2i + 3}$.

1. Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z .
2. Scrivere in forma esponenziale le radici quinte di z .

Esercizio 7. Si consideri il numero complesso $z = \frac{4i - 7}{2i - 1}$.

1. Determinare la forma algebrica di z .
2. Scrivere in forma esponenziale le radici cubiche di $z + i$.

Esercizio 8. Risolvere le seguenti equazioni di variabile complessa:

1. $z^2 - i\sqrt{3} + 1 = 0$
2. $z^3 - 2(1 + i)^4 = 0$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 - 2iz - 1 - 2i = 0$
5. $z^4 - (\sqrt{3} + i)^4 = 0$

Risultati degli esercizi

Esercizio 1

Nelle formule per gli argomenti si intende $k \in \mathbb{Z}$.

1. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$, $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
gli argomenti sono $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.
2. $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 1$, $\bar{z} = 1 - i$, $|z| = \sqrt{2}$;
gli argomenti sono $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.
3. $\operatorname{Re} z = -4$, $\operatorname{Im} z = 0$, $\bar{z} = -4$, $|z| = 4$;
gli argomenti sono $\pi + 2k\pi$.
4. $\operatorname{Re} z = \frac{4}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{5}$, $\bar{z} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, $|z| = 1$;
gli argomenti sono $-\arctan \frac{3}{4} + 2k\pi$.
5. $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = 2\sqrt{3}$, $\bar{z} = -2 - 2\sqrt{3}i$, $|z| = 4$;
gli argomenti sono $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Esercizio 2

1. $z = 1 + i$.
2. $z^9 = 16 + 16i$.

Esercizio 3

1. $z = \frac{5 + 3i}{1 + i} = 4 - i$.
2. $(z - 3)^{13} = (1 - i)^{13}$ ha modulo $64\sqrt{2}$; un argomento è $\frac{3\pi}{4}$. Tutti gli argomenti sono $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4

1. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.
2. Le radici quadrate sono $-\sqrt{3} + i$ e $\sqrt{3} - i$.

Esercizio 5

1. $z = -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.
2. Le radici cubiche sono

$$\sqrt[6]{2} e^{i5\pi/12}, \quad \sqrt[6]{2} e^{i13\pi/12}, \quad \sqrt[6]{2} e^{i7\pi/4}.$$

Esercizio 6

1. $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 2$.
2. Le radici quinte sono

$$\sqrt[10]{5} e^{i\left(\frac{\arctan 2}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Esercizio 7

1. $z = \frac{4i - 7}{2i - 1} = 3 + 2i$.
2. $z + i = 3 + 3i = 3\sqrt{2} e^{i\pi/4}$. Le radici cubiche sono

$$(3\sqrt{2})^{1/3} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Esercizio 8

1. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$.
2. $z = -2 \quad \vee \quad z = 1 + i\sqrt{3} \quad \vee \quad z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
4. $z = -1 \quad \vee \quad z = 1 + 2i$.
5. $z = \sqrt{3} + i \quad \vee \quad z = -\sqrt{3} - i$
 $\vee \quad z = 1 - i\sqrt{3} \quad \vee \quad z = -1 + i\sqrt{3}$.