

Regole di integrazione elementare

$$(I_1) \quad \int f'(x) (f(x))^{\alpha} dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$$

$$(I_2) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$(I_3) \quad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctan(f(x)) + C$$

INTEGRAZIONE delle FUNZIONI RAZIONALI

Siano $A(x), B(x)$ funzioni polinomiali di grado n ed m rispettivamente. Il nostro obiettivo è calcolare $\int \frac{A(x)}{B(x)} dx$

Se $n \geq m$ effettuiamo una divisione tra polinomi, cioè determiniamo $Q(x), R(x)$ polinomi tali che

- $A(x) = Q(x) B(x) + R(x)$
- $R(x) = 0$ oppure $\deg R < \deg B$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$Q(x)$ quoziente della divisione $\frac{A(x)}{B(x)}$
 $R(x)$ resto

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$$

↓
integrale indefinito
di un polinomio

↓
integrale di una funzione
razionale con numeratore $A(x)$
di grado minore del grado del
del denominatore $B(x)$

Denominatore di I grado

Siano $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha}{ax+b} dx &= \alpha \int \frac{1}{ax+b} dx = \alpha \int \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{ax+b} dx \\ &= \frac{\alpha}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{\alpha}{a} \ln|ax+b| + \text{costanti} \end{aligned}$$

Esempi (denominatore I grado)

$$(I_1) \quad f(x) = ax+b, f'(x) = a$$

$$1) \quad \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$$

$$2) \quad \int \frac{1}{2-5x} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{-5}{2-5x} dx = -\frac{1}{5} \ln|2-5x| + C$$

$$3) \quad \int \frac{x^3}{x+1} dx$$

x^3	divisore $x+1$
$x^3 + x^2$	$x^2 - x + 1$ quoziente
$\parallel - x^2$	
$- x^2 - x$	
$\parallel x$	
$x + 1$	
$\parallel - 1$	
	resto

$$x^3 = (x^2 - x + 1)(x + 1) - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x+1} dx &= \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx + \int 1 dx - \int \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|1+x| + C \end{aligned}$$

Alternativamente, poiché il divisore è un polinomio di grado 1, possiamo utilizzare la regola di Ruffini per calcolare la divisione

1	0	0	0
-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1

coefficienti
del quoziente

↓
è il resto

Denominatore di II grado Siano $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $a \neq 0$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx$$

La strategia per calcolare questo integrale dipende dalle radici del denominatore, ovvero del segno $\Delta = b^2 - 4ac$

Consideriamo separatamente i casi $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$

Caso $\Delta > 0$

Il denominatore ammette due radici reali e distinte

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

potremo risolvere il denominatore come segue

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

utilizziamo il METODO di DECOMPOSIZIONE in FRATTI SEMPLICI

cioè determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{(A + B)x - (x_2 A + x_1 B)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{1}{a}(\alpha x + \beta) = (A + B)x - (x_2 A + x_1 B)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{a} = (A + B)x - (x_2 A + x_1 B)$$

per il PRINCIPIO di IDENTITÀ tra POLINOMI

$$\frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{a} = (A + B)x - (x_2 A + x_1 B) \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} A + B = \frac{\alpha}{a} \\ x_2 A + x_1 B = -\frac{\beta}{a} \end{cases}$$

$\uparrow$
sistema lineare 2×2 nelle
incognite A, B

determinati A, B soluzioni del sistema, otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx \\ &= A \int \frac{1}{x - x_1} dx + B \int \frac{1}{x - x_2} dx \\ &= A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + \text{costanti} \end{aligned}$$

Esempi (denominatore di II grado con $\Delta > 0$)

1) $\int \frac{-x + 5}{2x^2 + x - 1} dx$

$$\Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 9 \quad \text{discriminante del denominatore}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{4} < \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$2x^2 + x - 1 = 2(x+1)(x-\frac{1}{2}) = (x+1)(2x-1)$$

Determiniamo la decomposizione in fattori semplici della funzione integranda, cioè troviamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{-x+5}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{-x+5}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A(2x-1) + B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow -x+5 = (2A+B)x - A+B \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+B = -1 \\ -A+B = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + (A+5) = -1 \\ B = A+5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = -6 \\ B = A+5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-x+5}{2x^2+x-1} dx &= \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{2x-1} \right) dx \\ &= -2 \int \frac{1}{x+1} dx + 3 \int \frac{1}{2x-1} dx \\ &= -2 \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x-1} dx \\ &= -2 \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|2x-1| + c \end{aligned}$$

$$2) \int_1^2 \frac{-4x^3 - 4x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 8x + 3} dx$$

Poiché il numeratore è un polinomio di grado 3 e il denominatore è un polinomio di grado 2, calcoliamo la divisione tra numeratore e denominatore

$$\begin{array}{r|l} -4x^3 - 4x^2 + 7x + 2 & 4x^2 + 8x + 3 \\ -4x^3 - 8x^2 - 3x & -x+1 \\ \hline // & 4x^2 + 10x + 2 \\ & 4x^2 + 8x + 3 \\ \hline // & 2x - 1 \end{array}$$

$$\int \frac{-4x^3 - 4x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 8x + 3} dx = \int \left(-x + 1 + \frac{2x-1}{4x^2+8x+3} \right) dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} + x + \int \frac{2x-1}{4x^2+8x+3} dx$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0 \quad \text{discriminante del denominatore}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 2}{4} < \begin{matrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{radici reali e distinte del denominatore}$$

$$4x^2 + 8x + 3 = 4 \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (2x+3)(2x+1)$$

Determiniamo la decomposizione in fattori semplici.

$$\frac{2x-1}{4x^2+8x+3} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(2x+3)(2x+1)} = \frac{A(2x+1) + B(2x+3)}{(2x+3)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = (2A+2B)x + A+3B \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+2B=2 \\ A+3B=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A+3B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B \\ 2B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x-1}{4x^2+8x+3} dx = \int \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

$$= \int \frac{2}{2x+3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx$$

$$= \ln|2x+3| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

Applichiamo il Teorema di Torricelli per calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{-4x^3 - 4x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 8x + 3} dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x + \ln(2x+3) - \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right]_1^2$$

$$= -2+2 + \ln 7 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} - 1 - \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 7 - \frac{3}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 3$$

Caso $\Delta = 0$

Il denominatore ammette una radice reale doppia $x_1 = -\frac{b}{2a}$
pertanto possiamo fattorizzare il denominatore come segue
 $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2$

utilizziamo il metodo di decomposizione in frazioni semplici,
cui determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)^2} = \frac{A(x-x_1) + B}{(x-x_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{a} = Ax - x_1A + B \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} A = \frac{\alpha}{a} \\ -x_1A + B = \frac{\beta}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\alpha}{a} \\ B = \frac{\beta}{a} + x_1A = \frac{\beta}{a} + \frac{\alpha x_1}{a} = \frac{\alpha x_1 + \beta}{a} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} \right) dx \\ &= A \int \frac{1}{x-x_1} dx + B \int \frac{1}{(x-x_1)^2} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \ln|x-x_1| + B \left(-\frac{1}{x-x_1} \right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{(f(x))^2} dx = -\frac{1}{f(x)} + c}$$

$$= A \ln|x-x_1| - \frac{B}{x-x_1} + c$$

Esempio (denominatore di II con $\Delta = 0$)

$$\int \frac{x}{9x^2 - 6x + 1} dx$$

$\Delta = 0$ pertanto il denominatore ha una radice doppia

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$$

Determiniamo la decomposizione in frazioni semplici:

$$\frac{x}{9x^2-6x+1} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{(3x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{x}{(3x-1)^2} = \frac{A(3x-1)+B}{(3x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3Ax - A + B \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{9x^2-6x+1} dx &= \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(3x-1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x-1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(3x-1)^2} dx \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{3}{3x-1} dx + \frac{1}{9} \int \frac{3}{(3x-1)^2} dx \\ &= \frac{1}{9} \ln |3x-1| - \frac{1}{9} \frac{1}{3x-1} + C \end{aligned}$$

Caso $\Delta < 0$

In questo caso il denominatore ammette due radici complesse e coniugate

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad \text{con } \alpha_1 = -\frac{b}{2a}, \beta_1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x-z_1)(x-z_2) \\ &= a(x-(\alpha_1+i\beta_1))(x-(\alpha_1-i\beta_1)) \\ &= a(x-\alpha_1-i\beta_1)(x-\alpha_1+i\beta_1) \\ &= a[(x-\alpha_1)^2 - (i\beta_1)^2] = a[(x-\alpha_1)^2 - i^2\beta_1^2] \\ &= a[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2] = a\beta_1^2 \left[\frac{(x-\alpha_1)^2}{\beta_1^2} + 1 \right] \\ &= a\beta_1^2 \left[\left(\frac{x-\alpha_1}{\beta_1} \right)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

alternativamente

$$ax^2+bx+c = a \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \left[\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}} \right)^2 + 1 \right] = \frac{-\Delta}{4a} \left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1 \right]$$

NB : la scrittura precedente si può ottenere utilizzando il METODO di COMPLETAMENTO dei QUADRATI

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A(2ax + b) + B}{ax^2 + bx + c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{2aAx + bA + B}{ax^2 + bx + c}$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta = 2aAx + bA + B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2aA = \alpha \\ bA + B = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\alpha}{2a} \\ B = \beta - bA = \beta - \frac{b\alpha}{2a} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{A(2ax + b) + B}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= A \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= A \ln |ax^2 + bx + c| + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \end{aligned}$$

calcoliamo e porta l'ultimo integrale

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{a\beta_1^2 \left[\left(\frac{x - \alpha_1}{\beta_1} \right)^2 + 1 \right]} dx \\ &= \frac{1}{a\beta_1} \int \frac{\frac{1}{\beta_1}}{\left(\frac{x - \alpha_1}{\beta_1} \right)^2 + 1} dx \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{a\beta_1} \arctan \left(\frac{x - \alpha_1}{\beta_1} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \arctan f(x) + C$$

$$\text{con } f(x) = \frac{x - \alpha_1}{\beta_1}, \quad f'(x) = \frac{1}{\beta_1}$$

Esempio (denominatore di II grado con $\Delta < 0$)

$$1) \int_{-1}^1 \frac{3x}{x^2+2x+5} dx$$

Calcoliamo preliminarmente l'integrale $\int \frac{3x}{x^2+2x+5} dx$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$$

Il denominatore ammette due radici complesse e coniugate

$$z_{1/2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Risolviamo il denominatore come somma di quadrati

$$\begin{aligned} x^2+2x+5 &= (x-z_1)(x-z_2) = (x-(-1+2i))(x-(-1-2i)) \\ &= (x+1-2i)(x+1+2i) = (x+1)^2 - (2i)^2 = (x+1)^2 + 4 \\ &= 4 \left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

Determino $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^2+2x+5} &= \frac{A(2x+2) + B}{x^2+2x+5} \Leftrightarrow 3x = 2Ax + 2A + B \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 3 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^2+2x+5} dx &= \int \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - 3 \cdot \frac{1}{x^2+2x+5} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Applichiamo le formule di Torricelli

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{3x}{x^2+2x+5} dx &= \left[\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{3}{2} \ln 8 - \frac{3}{2} \arctan 1 - \left(\frac{3}{2} \ln 4 - \frac{3}{2} \arctan 0 \right) \\ &= \frac{3}{2} (\ln 8 - \ln 4) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{3}{2} \left(\ln 2 - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$