MATEMATICA - LEZIONE 2

giovedì 3 ottobre 2024 13:59

Insiemi Numerici

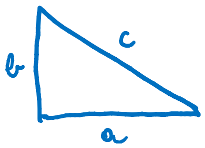
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$ NUMERI NATURALI

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \dots\}$ NUMERI INTERI RELATIVI

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$ NUMERI RAZIONALI

La necessità di introdurre i numeri reali è nata con il Teorema di Pitagora

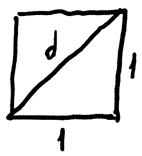
Triangolo rettangolo



Teorema di Pitagora:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Diagonale di un quadrato di lato 1:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$d^2 = 2.$$

TEOREMA (IRRAZIONALITÀ DI $\sqrt{2}$)

$\nexists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

DIM

Per assurdo supponiamo che $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

Poiché $q \in \mathbb{Q}$, $\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ t.c. $q = \frac{a}{b}$.

Possiamo supporre che a e b non siano entrambi pari.

(altrimenti, possiamo semplificare la frazione).

$$q^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$\Rightarrow a^2$ è pari.

$\Rightarrow a$ è pari.

Allora $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2k$.

$$
\begin{aligned}
a^2 = 2b^2 \quad &\Rightarrow \quad (2k)^2 = 2b^2 \\
&\Rightarrow \quad 4k^2 = 2b^2 \\
&\Rightarrow \quad 2k^2 = b^2 \\
&\Rightarrow \quad b^2 \text{ è pari.} \\
&\Rightarrow \quad b \text{ è pari.}
\end{aligned}
$$

a e b sono entrambi pari. Questo contraddice quanto supposto all'inizio. $\square$

Ogni numero razionale si può scrivere anche in forma decimale

- $\dfrac{1}{2} = 0,5$
- $\dfrac{1}{5} = 0,2$
- $\dfrac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,\overline{3}$
- $\dfrac{113}{50} = 2,26$

$$
\begin{array}{r|l}
113 & 50 \\ \cline{2-2}
100 & 2,26 \\ \cline{1-1}
130 & \\
100 & \\ \cline{1-1}
300 & \\
300 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

- $\dfrac{1}{3} = 0,\overline{3}$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 3 \\ \cline{2-2}
0 & 0,33\ldots\ldots \\ \cline{1-1}
10 & \\
9 & \\ \cline{1-1}
10 &
\end{array}
$$

- $\dfrac{2}{15} = 0,1\overline{3}$

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 15 \\ \cline{2-2}
0 & 0,1333\ldots\ldots \\ \cline{1-1}
20 & \\
15 & \\ \cline{1-1}
50 & \\
45 & \\ \cline{1-1}
5 &
\end{array}
$$

- $2,1\overline{74} = 2,1747474\ldots\ldots$

TEOREMA Tutti i numeri razionali hanno una scrittura decimale o finita o periodica

Il numero

$0,01001000100001\ldots\ldots$

non può essere razionale.

Altri esempi famosi di numeri non razionali:
(IRRAZIONALI): π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ....

Numeri Reali

$$\mathbb{R} = \{ n,a_1a_2a_3a_4\ldots\ldots \mid n \in \mathbb{Z},\ a_1,a_2\ldots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$$

OSS

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

PROPRIETÀ DELL'ADDIZIONE

1) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$: $a+b = b+a$ (PROP. COMMUTATIVA)
2) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$: $a+(b+c) = (a+b)+c$ (PROP. ASSOCIATIVA)
   $a+b+c$
3) $\forall\, a \in \mathbb{R}$; $a+0 = a$
4) $\forall\, a \in \mathbb{R}$: $-a$ è l'unico numero reale tale che
   $a+(-a) = 0.$

Conseguenze

- LEGGE DI CANCELLAZIONE :

$\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$: $a+c = b+c \iff a = b$

$(a+\cancel{c} = b+\cancel{c} \iff a=b)$

- $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$: $a+c = b \iff a = b-c$

PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE (Indichiamo il prodotto con $a \cdot b$ o ab)

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = b \cdot a$ (PROP. COMMUTATIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE)

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
(PROP. ASSOCIATIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE)

3) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 1 = a.$

4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \frac{1}{a}$ è l'unico numero reale tale che
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
(PROP. DISTRIBUTIVA).

Conseguenze:

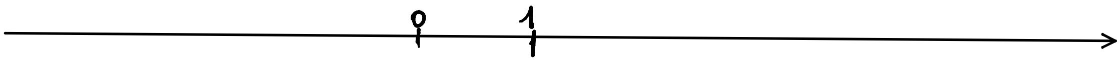
- $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 0 = 0$
- Legge di annullamento del prodotto
  $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$
- Legge di cancellazione per la moltiplicazione:
  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0: \quad ac = bc \iff a = b$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0: \quad ac = b \iff a = \frac{b}{c}$

Attenzione

- $x + \cancel{3} = 5 + \cancel{3}$
  $x = 5$
- $x + \cancel{3} = \cancel{3}$
  $x = 0$
- $\cancel{2}x = \cancel{2}$
  $x = 1$

Ordinamento di $\mathbb{R}$.

I numeri reali si possono rappresentare su una retta. Questo ci permette di ordinarli in maniera naturale.



Relazioni di ordinamento ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$)

MAGGIORE
MINORE
MAGGIORE O UGUALE
MINORE O UGUALE

$a > b$ significa che a sta alla destra di b sulla retta

$a \geq b$ significa: $a > b \lor a = b$

$a < b$ significa a è alla sinistra di b

$a \leq b$ significa $a < b \lor a = b$

PROPRIETÀ DELL'ORDINAMENTO

1) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \leq a.$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a = b \iff a \leq b \land b \leq a.$

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \land b \leq c \implies a \leq c$

(PROP. TRANSITIVA)

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \lor b \leq a$

$(a < b \lor a = b \lor b < a)$

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \iff a + c \leq b + c$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \land c > 0 \iff ac \leq bc$

$(a \leq b \land c < 0 \iff ac \geq bc)$

La proprietà 5) dice che si può aggiungere (o sottrarre) un qualsiasi numero ottenendo una disuguaglianza equivalente.

La proprietà 6) ci dice che possiamo moltiplicare (o dividere) una disuguaglianza per un numero positivo ottenendo una disuguaglianza equivalente. Se invece moltiplichiamo per un numero negativo occorre invertire il verso della disuguaglianza

$1 < 2$ ma $-1 > -2$

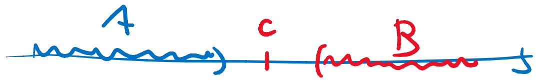
PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DI $\mathbb{R}$

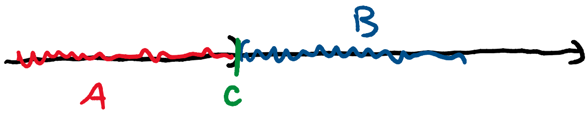
Siano A, B due insiemi non vuoti t.c.

$\forall a \in A,\ b \in B: \quad a \le b.$

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$\forall a \in A,\ b \in B: \ a \le c \le b.$





Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $a < c < b$.

In particolare, questo ci permette di approssimare ogni numero reale con numeri razionali.

Correzione del test di Valutazione

Quesito 1. L'espressione $\frac{2}{2+\frac{1}{2}}$ è uguale a:

(A) $\frac{3}{2}$
(B) $\frac{4}{5}$
(C) $\frac{1}{5}$
(D) 6
(E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

$$\frac{2}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{4+1}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

Quesito 2. Il numero $\frac{10^5}{5^4 \cdot 2^5}$ è uguale a:

(A) 5.
(B) 1.
(C) 10^{-15}.
(D) 2^{-4}.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$\frac{10^5}{5^4 \cdot 2^5} = \frac{(2 \cdot 5)^5}{5^4 \cdot 2^5} = \frac{\cancel{2^5} \cdot 5^5}{5^4 \cdot \cancel{2^5}} = \frac{5^5}{5^4} = 5^{5-4} = 5^1 = 5$$

Quesito 3. Il numero $\frac{2}{8^3}$ è uguale a:

(A) 16^{-3}.
(B) 4^{-3}.
(C) 2^{-24}.
(D) 2^{-8}.
(E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

$$\frac{2}{8^3} = \frac{2}{(2^3)^3} = \frac{2}{2^9} = 2^{1-9} = 2^{-8}$$

Quesito 4. Siano a e b due numeri reali. Quale delle seguenti uguaglianze è sicuramente verificata?

(A) $(a^2 + 2b)^2 = a^2 + 4b^2$.
(B) $(a^2 + 2b)^2 = a^4 + 4b^2$.
(C) $(a^2 + 2b)^2 = a^4 + 4b^2 + 4a^2b$.
(D) $(a^2 + 2b)^2 = a^4 + 4b^2 + 2a^2b$.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$(a^2+2b)^2 = (a^2)^2 + (2b)^2 + 2a^2 \cdot 2b$$
$$= a^4 + 4b^2 + 4a^2b$$

Quesito 5. Sia x un numero reale diverso da 0 e da $\frac{1}{2}$, l'espressione $\dfrac{(2x-1)(x+1)}{2x^2-x}$ è uguale a:

(A) $-\dfrac{x+1}{x}$
(B) $1 + \dfrac{1}{x}$
(C) $-\dfrac{1}{2x-1}$
(D) $1 - 2x$.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$\frac{(2x-1)(x+1)}{2x^2-x} = \frac{\cancel{(2x-1)}(x+1)}{x\cancel{(2x-1)}} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

Quesito 6. L'equazione $(3 - 2x)(x^2 + 1) = 0$ ha:

(A) 3 soluzioni reali
(B) 2 soluzioni reali
(C) Una soluzione reale
(D) Nessuna soluzione reale.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$(3-2x)(x^2+1) = 0$$

$3 - 2x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 1 = 0$

$-2x = -3 \qquad x^2 = -1$ (impossibile)

$x = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ una soluzione.

Quesito 7. Si consideri l'equazione $\frac{3x+1}{x+3} = \frac{1}{x}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) Le uniche soluzioni sono $x = -3$ e $x = 0$.
(B) $x = 1$ è l'unica soluzione.
(C) $x = 1$ e $x = -1$ sono le uniche soluzioni.
(D) L'equazione non ha soluzioni reali.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$\frac{3x+1}{x+3} = \frac{1}{x} \qquad \text{c.e}: \quad x \neq 0, \; x \neq -3$$

$$x\,\frac{(3x+1)}{x+3} = 1$$

$$x(3x+1) = x+3$$

$$3x^2 + \cancel{x} = \cancel{x} + 3$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

$$\left(x^2 = 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0 \iff x = 1 \vee x = -1 \right)$$

Quesito 8. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente alla disugualianza $-2x > 10$?

(A) $x > 5$.
(B) $x < 5$.
(C) $x > -5$.
(D) $x < -5$.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$-2x > 10$$

$$x < \frac{10}{-2}$$

$$x < -5$$

Quesito 9. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente alla disuguaglianza $3x^2 - 1 \leq 0$

(A) $x > \frac{1}{\sqrt{3}} \ \vee \ x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(B) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

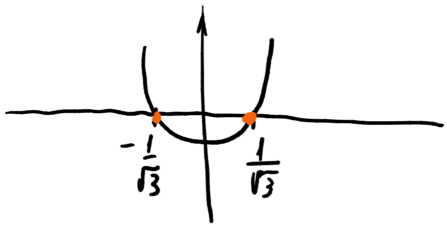
(C) Ogni $x \in \mathbb{R}$ risolve la disequazione.

(D) La disequazione non ha soluzioni reali.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$3x^2 - 1 \leq 0$$

$$\left(3x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Quesito 10. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente alla disuguaglianza $\frac{2x-3}{x} \leq 1$?

(A) $0 < x \leq 3$

(B) $x < 0 \ \vee x \geq 3$.

(C) $x \geq 3$.

(D) $x \leq 3$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$\frac{2x-3}{x} \leq 1$$

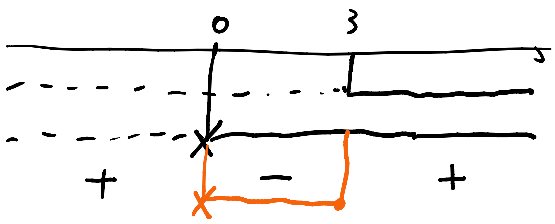
$$\frac{2x-3}{x} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x-3-x}{x} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{x} \leq 0$$

$$x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$$

$$x > 0 \iff x > 0$$

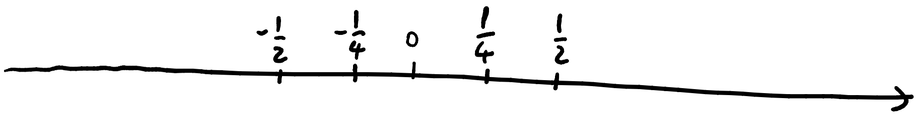


$$0 < x \leq 3$$

Quesito 11. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$.
(B) $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
(C) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
(D) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{2}, \; \frac{1}{4}, \; -\frac{1}{4}$



Quesito 12. In un ristorante, un piatto di orecchiette costa 6 euro. Il proprietario sta pensando di aumentare il prezzo del 20%. Quale sarebbe il prezzo del piatto di orecchiette dopo l'aumento?

(A) 6 euro e 20 centesimi.
(B) 7 euro e 20 centesimi.
(C) 8 euro.
(D) 26 euro.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

costo 6 euro

Aumentiamo il prezzo del 20%

$$6 \cdot \frac{20}{100} = 6 \cdot \frac{2}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$$

Il nuovo prezzo è $6 + 1,2 = 7,2$

Quesito 13. Un gruppo di 10 studenti ha sostenuto un test con 20 domande di matematica. Sapendo che l'affermazione "*Tutti gli studenti hanno superato il test*" è falsa, si può trarre una tra le seguenti conclusioni. Quale?

(A) Nessuno studente ha superato il test.
(B) Nessuno studente ha risposto correttamente alla domanda numero 13.
(C) C'è almeno uno studente che ha superato il test.
(D) C'è almeno uno studente che non ha superato il test.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Ricordare la negazione dei simboli quantificatori.

Quesito 14. Si considerino gli insiemi

$$A := \{4, 0, -1\}, \quad B := \left\{\frac{1}{2}, 3, -1\right\} \quad \text{e} \quad C := \left\{\frac{1}{2}, 4, 0\right\}.$$

(A) $A \cup B$ ha 5 elementi.
(B) $B \setminus A \subseteq \mathbb{Z}$
(C) $B \setminus A \subseteq C$.
(D) $A \cap B = \emptyset$.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$A = \{4, 0, -1\}$, $B = \{\frac{1}{2}, 3, -1\}$, $C = \{\frac{1}{2}, 4, 0\}$

$A \cup B = \{4, 0, -1, \frac{1}{2}, 3\}$ ✓

$B \setminus A = \{\frac{1}{2}, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$? NO

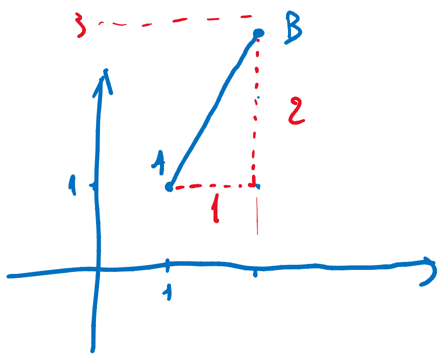
$B \setminus A = \{\frac{1}{2}, 3\} \subseteq C$ NO

$A \cap B = \emptyset$ NO

Quesito 15. Nel piano cartesiano, la distanza tra i punti $A = (1, 1)$ e $B = (2, 3)$ è uguale a?

(A) 17.
(B) $\sqrt{17}$.
(C) $\sqrt{5}$.
(D) 5.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

- $A = (1, 1)$ $B(2, 3)$



$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Formula per la distanza

$P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Quesito 16. Nel piano cartesiano di coordinate (x, y), quale delle seguenti rette è parallela alla retta di equazione $y = 2x$ e passa per il punto $P = (0, 1)$?

(A) $-2x + y - 1 = 0$.
(B) $2x + y - 1 = 0$.
(C) $x + 2y - 2 = 0$.
(D) $y - 2x + 2 = 0$.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

retta parallela a $y=2x$ che passa per $(0,1)$.

$y = 2x + q$

sostituisco $x=0$, $y=1$

$1 = 0 + q \iff q=1$

$y = 2x + 1$

Quesito 17. Nel piano cartesiano di coordinate (x, y), cosa rappresenta l'equazione $x^2 - 2y^2 = 1$?

(A) Una retta.
(B) Un'ellisse.
(C) Un'iperbole.
(D) Una parabola.
(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

equazione iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad o \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$a = 1 \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2 - 2y^2 = 1$

Quesito 18. Si consideri il polinomio $p(x) = x^3 + 4x - 5$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $p(2) = 0$.

(B) $p(x)$ è divisibile per $x - 1$.

(C) $p(x)$ è divisibile per $x + 1$.

(D) $p(x)$ non ha radici reali.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Segue dal Teorema di Ruffini perché

$p(1) = 1 + 4 - 5 = 0$

Quesito 19. Quale dei seguenti numeri è uguale a $\log_3(\frac{1}{3} \cdot 9^8)$?

(A) -8.

(B) 8.

(C) 15.

(D) 16.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

$$\log_3\left(\frac{1}{3} \cdot 9^8\right) = \log_3 \frac{1}{3} + \log_3 9^8$$
$$= -1 + \log_3 3^{16}$$
$$= -1 + 16 = 15$$

Quesito 20. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

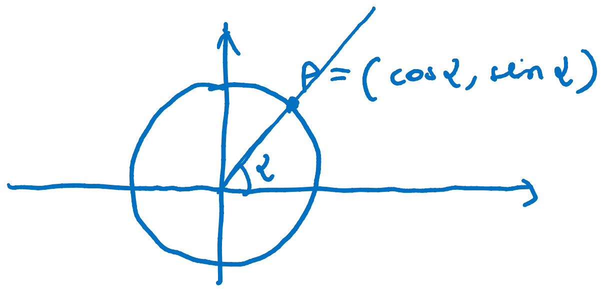
(A) $\cos \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

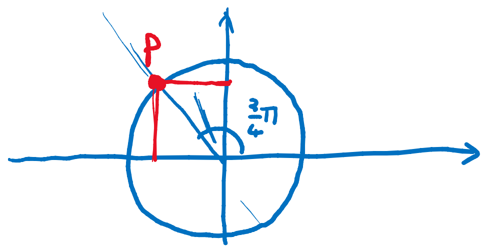
(B) $\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

(D) $\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.





$$\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \sin^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1$$

$$2\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1$$

$$\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$