

## Esercizi - Equazioni differenziali

**Esercizio 1.** Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

- |                                                           |                                    |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------------|
| a) $y' = 2y - 3$ .                                        | i) $y' = e^{-2y} \sin x$ .         |
| b) $y' + \frac{y}{x} = 3x^4$ , con $x \in (0, +\infty)$ . | j) $y' = (1 + y^2)\sqrt{2x + 1}$ . |
| c) $y' = 2xy - x^3$ .                                     | k) $4y'' + 4y' + y = 0$ .          |
| d) $e^x y' = y$ .                                         | l) $y'' - 4y = 3x - 4$ .           |
| e) $y' = -y + 6x + 1$                                     | m) $y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$ .     |
| f) $y' + 2y = \cos(4x)$ .                                 | n) $y'' - 6y' + 10y = 5x - 1$      |
| g) $y' = 5y + 3e^{\frac{x}{2}}$ .                         | o) $y'' + 25y = 5e^{5x}$           |
| h) $y' = 3y - 2xe^{3x}$ .                                 | p) $3y'' + 2y' - y = x^2$          |
|                                                           | q) $y'' = 6y' - 13y + xe^x$ .      |

**Esercizio 2.** Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- a)  $y'' = \sin(3x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$ .
- b)  $y' = xy^2$ ,  $y(0) = 1$ .
- c)  $(4x + 3)^2 y' = y$ ,  $y(-1) = e$ .
- d)  $y' + (y - 2)^3 = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
- e)  $(2x - 1)y' + y = 2$ ,  $y(1) = -1$ .
- f)  $y'' - 4y = 8$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .
- g)  $y'' - 2y' + 10y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -4$ .
- h)  $2y'' - 7y' + 3y = x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ .
- i)  $y' = \frac{e^{3x}}{y^3}$ ,  $y(0) = -1$ .
- j)  $y' = \frac{3y-2}{4+x^2}$ ,  $y(2) = \frac{1}{3}$ .

**Esercizio 3.** Si consideri l'equazione differenziale

$$9y'' + 6y' + y = x^2 + 10x.$$

1. Determinare la soluzione generale dell'equazione.
2. Determinare la soluzione che soddisfa  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$ .
3. Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione inferiormente limitate in  $\mathbb{R}$ .

## Risultati

### Esercizio 1.

a)  $y(x) = \frac{3}{2} + Ce^{2x}$ .

b)  $y(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{C}{x}$ .

c)  $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{x^2}$ .

d)  $y(x) = Ce^{-e^{-x}}$ .

e)  $y(x) = 6x - 5 + Ce^{-x}$ .

f)  $y(x) = \frac{1}{10} \cos 4x + \frac{1}{5} \sin 4x + Ce^{-2x}$ .

g)  $y(x) = -\frac{2}{3}e^{\frac{x}{2}} + Ce^{5x}$ .

h)  $y(x) = -x^2e^{3x} + Ce^{3x}$ .

i)  $y(x) = \frac{1}{2} \log(2C - 2 \cos x)$ .

j)  $y(x) = \tan \left( C + \frac{1}{3}(2x + 1)^{\frac{2}{3}} \right)$ .

k)  $y(x) = C_1e^{-\frac{x}{2}} + C_2xe^{-\frac{x}{2}}$ .

l)  $y(x) = 1 - \frac{3}{4}x + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ .

m)  $y(x) = x + C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$ .

n)  $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5} + C_1e^{3x} \cos x + C_2e^{3x} \sin x$ .

o)  $y(x) = \frac{1}{10}e^{5x} + C_1 \cos 5x + \sin 5x$ .

p)  $y(x) = -x^2 - 4x - 14 + C_1e^{\frac{x}{3}} + C_2e^{-x}$ .

q)  $y(x) = \frac{1}{8}xe^x + \frac{1}{16}e^x + C_1e^{3x} \cos(2x) + C_2e^{3x} \sin(2x)$

### Esercizio 2.

a)  $y(x) = 1 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{9} \sin 3x$ .

b)  $y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$ .

c)  $y(x) = e^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4(4x+3)}}$ .

$$\text{d) } y(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$\text{e) } y(x) = 2 - \frac{3}{\sqrt{2x-1}}.$$

$$\text{f) } y(x) = -2 + e^{2x} + e^{-2x}.$$

$$\text{g) } y(x) = e^x \cos 3x - \frac{5}{3} e^x \sin 3x$$

$$\text{h) } y(x) = \frac{7}{9} + \frac{x}{3} + \frac{11}{9} e^{3x} - 2e^{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{i) } y(x) = -\sqrt[4]{\frac{4e^{3x}-1}{3}}.$$

$$\text{j) } y(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{3}{8} \pi}.$$

**Esercizio 3.**    1.  $y(x) = x^2 - 2x - 6 + C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}}$

2.  $y(x) = x^2 - 2x - 6 + 6e^{-\frac{x}{3}} + 8xe^{-\frac{x}{3}}$

3.  $y(x) = x^2 - 2x - 6 + C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}}$  con  $C_2 < 0$  oppure  $C_2 = 0$  e  $C_1 \geq 0$ .