EDO lineari di I ordine

$$y' = a(x)\,y + g(x)$$

- omogenea se $g(x) = 0$
  La soluzione generale è
  $y(x) = K e^{A(x)}$, A primitiva di a

- non omogenea $g(x) \neq 0$.
  $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$
  dove $y_0(x)$ è la soluzione generale dell'eq. omogenea e $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare
  Abbiamo visto che $\bar{y}$ si può determinare utilizzando il metodo di variazione delle costanti: $\bar{y}(x) = K(x)\,e^{A(x)}$.

ESEMPIO

$$y' = 2y + 3x$$

L'equazione è lineare non omogenea di I ordine

$a(x) = 2$, $g(x) = 3x$

1) Risolvo l'equazione omogenea:
   $y' = 2y$.
   La soluzione generale dell'eq. omogenea è
   $y_0(x) = K e^{2x}$.

2) Cerco $\bar{y}(x) = K(x)\,e^{2x}$ soluzione particolare dell'eq. completa.

$$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{2x} + K(x)\, 2 e^{2x} \qquad y' = 2y + 3x$$

$$K'(x) e^{2x} + \cancel{K(x)\, 2 e^{2x}} \overset{!}{=} \cancel{2K(x) e^{2x}} + 3x$$

$$K'(x) e^{2x} = 3x$$

$$K'(x) = 3x e^{-2x}$$

$$K(x) = \int 3x e^{-2x} dx = 3 \int \underbrace{x}_{g} \underbrace{e^{-2x}}_{f'} dx$$

$$= 3\left(\frac{e^{-2x}}{-2} x - \int \frac{e^{-2x}}{-2} \cdot 1 \, dx \right)$$

$$= 3\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} x + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \right)$$

$$= 3\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} x - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) + C$$

$$= -\frac{3}{2} e^{-2x} x - \frac{3}{4} e^{-2x} + C$$

Scelgo $K(x) = -\frac{3}{2} e^{-2x} x - \frac{3}{4} e^{-2x}$

$$\bar{y}(x) = K(x) e^{2x} = \left(-\frac{3}{2} e^{-2x} x - \frac{3}{4} e^{-2x} \right) e^{2x}$$

$$= -\frac{3}{2} x - \frac{3}{4}$$

La soluzione generale è

$$y(x) = -\frac{3}{2} x - \frac{3}{4} + K e^{2x}.$$

Metodo alternativo per trovare $\bar{y}$:

Dato che $g(x) = 3x$ è un polinomio di 1° grado provo a cercare $\bar{y}$ come un polinomio dello stesso grado.

$\bar{y}(x) = Ax + B$ con $A, B \in \mathbb{R}$.

$\bar{y}'(x) = A$

$A \overset{!}{=} 2(Ax+B) + 3x$

$A - 2(Ax+B) = 3x$

$-2Ax + A - 2B = 3x$

$$\begin{cases} -2A = 3 \\ A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

Regole del metodo di similarità

Consideriamo un'equazione del tipo:

$y' = \underbrace{a}_{\text{costante}} y + g(x)$, $a \in \mathbb{R}$.

1) Se $g(x)$ è un polinomio di grado m, posso cercare $\bar{y}$ come un polinomio di grado $\leq m$.

2) $g(x) = e^{\alpha x} p(x)$ con $p(x)$ polinomio di grado m.

Si cerca $\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} q(x) & \text{se } \alpha \neq a \text{ con } q(x) \text{ polinomio di grado } \leq m. \\ e^{\alpha x} q(x)\, x & \text{se } \alpha = a. \end{cases}$

3) $g(x) = \cos(\beta x)\, p(x)$ (o $\sin(\beta x) p(x)$) con p pol. di grado m

$\bar{y}(x) = q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)$

dove q_1, q_2 sono polinomi di grado $\leq n$.

4) $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, p(x)$ o $e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, p(x)$

con p pol. di grado n e $\beta \neq 0$.

Allora $\bar{y}(x) = q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

dove q_1, q_2 sono polinomi di grado $\leq n$.

5) Se $g(x) = p_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + p_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

allora

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \text{se } \beta \neq 0 \text{ o } \alpha \neq a \\ q_1(x) e^{\alpha x} x & \text{se } \beta = 0 \text{ e } \alpha = a. \end{cases}$$

ESEMPIO

$$y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$$

Eq. lineare di I ordine non omogenea

$a(x) = 5$, $g(x) = 10x^2 - \frac{9}{5}$ (polinomio di grado 2)

1) Risolvo l'equazione omogenea:

$$y_0(x) = K e^{5x}$$

2) Cerco una soluzione particolare con il metodo di similarità

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Imponiamo che $\bar{y}$ risolva $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

$$\bar{y}' - 5y = 10x^2 - \frac{9}{5}$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

Vogliamo

$$2Ax + B - 5(Ax^2 + Bx + C) = 10x^2 - \frac{9}{5}$$

$$-5Ax^2 + x(2A - 5B) + B - 5C = 10x^2 - \frac{9}{5}$$

$$\begin{cases} -5A = 10 \\ 2A - 5B = 0 \\ B - 5C = -\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = \frac{2}{5}A = -\frac{4}{5} \\ 5C = B + \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -\frac{4}{5} \\ C = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = -2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}.$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = -2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} + Ke^{5x}.$$

ESEMPIO 2

$$y' = 4y + 2\cos x$$

Eq. lineare di I° ordine non omogenea

con $a(x) = 4$, $g(x) = 2\cos x$

1) Sol. dell' eq. omogenea è $y_0(x) = Ke^{4x}$.

2) Cerco una soluzione particolare:

$$\bar{y}(x) = A\cos x + B\sin x$$

Imponiamo $\quad \bar{y}' = 4\bar{y} + 2\cos x.$

$$\bar{y}' - 4\bar{y} = 2\cos x$$

$$\bar{y}'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$\bar{y}' - 4\bar{y}' = \underline{-A\sin x + B\cos x - 4\left(A\cos x + B\sin x\right)} \overset{!}{=} 2\cos x$$

$$(B - 4A)\cos x + (-A - 4B)\sin x = 2\cos x$$

$$\begin{cases} B - 4A = 2 \\ -A - 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17B = 2 \\ A = -4B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{2}{17} \\ A = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{8}{17}\cos x + \frac{2}{17}\sin x$$

La sol. generale è del tipo

$$y(x) = -\frac{8}{17}\cos x + \frac{2}{17}\sin x + K e^{4x}.$$

ESEMPIO 3

$$y' + 3y = x e^{-x}$$

cioè $\quad y' = -3y + x e^{-x}. \qquad \qquad a(x) = -3, \quad g(x) = x e^{-x}$

Eq. lineare di I ordine non omogenea.

1) Sol. eq. omogenea:

$$y_0(x) = K e^{-3x}$$

2) Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$.

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

Imponiamo $\quad \bar{y}' + 3\bar{y} = x e^{-x}$

$$\bar{y}'(x) = A e^{-x} + (Ax+B)e^{-x}(-1) = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}$$

Vogliamo

$$Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} + 3(Ax+B)e^{-x} \overset{!}{=} x e^{-x}$$

$$Ae^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x} + 3Axe^{-x} + 3Be^{-x} \overset{!}{=} e^{-x}$$

$$2Axe^{-x} + Ae^{-x} + 2Be^{-x} = xe^{-x}$$

$$\cancel{e^{-x}}(2Ax + A+2B) = x\cancel{e^{-x}}$$

$$2Ax + A+2B = x$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ A+2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-x}$$

La soluzione generale è del tipo:

$$y(x) = \bar{y}(x) + Ke^{-3x}.$$

ESEMPIO 4

$$y' = -3y + e^{-3x} \qquad g(x) = e^{-3x}$$

L'eq. è lineare di I° ordine non omogenea.

1) La soluzione dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = Ke^{-3x}.$$

2) Cerco una soluzione particolare dell'eq. completa.

$$\bar{y}(x) = Ae^{-3x}x$$

Imponiamo che $\bar{y}' = -3\bar{y} + e^{-3x}$

$$\bar{y}' + 3\bar{y} = e^{-3x} \quad (*)$$

$$\bar{y}(x) = A e^{-3x} x$$

$$\bar{y}'(x) = A(-3e^{-3x} x + e^{-3x})$$

$$= A e^{-3x}(-3x + 1) = -3Axe^{-3x} + Ae^{-3x}$$

Vogliamo:

$$\cancel{-3Axe^{-3x}} + Ae^{-3x} + \cancel{3Ae^{-3x} x} \stackrel{!}{=} e^{-3x}$$

$$A e^{-3x} = e^{-3x} \implies A = 1.$$

$$\bar{y}(x) = e^{-3x} x$$

La soluzione generale è

$$y(x) = e^{-3x} x + k e^{-3x}$$

$$y' = -3y + (3x+2) e^{-3x}$$

$$\bar{y}(x) = (Ax+B) e^{-3x} x$$

ESERCIZI

- $y' + y = 1 - x$
- $\begin{cases} y' = -2y + e^{3x} \\ y(0) = -1 \end{cases}$
- $y' = 2y - 5x \sin x$
- $\begin{cases} y' = xy - 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- $y' = (\operatorname{tg} x)\, y + x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Vantaggio: $\cos x > 0$.

ESEMPIO 5

$y' = y + 2x + e^x$

- $y_0(x) = Ke^x$ (sol. eq. omogenea)
- Cerco $\bar{y}$ sol. dell'eq. completa

$g(x) = 2x + e^x = g_1(x) + g_2(x)$

Sfruttando il principio di sovrapposizione posso cercare $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$ dove

$\bar{y}_1' = \bar{y}_1 + 2x$ e $\bar{y}_2' = \bar{y}_2 + e^x$

$\bar{y}_1(x) = Ax + B$

$A = Ax + B + 2x$

$-Ax + A - B = 2x$

$\begin{cases} -A = 2 \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -2 \end{cases}$

$\bar{y}_1(x) = -2x - 2$

$\bar{y}_2(x) = c\,e^x x$

$\cancel{c e^x x} + c e^x = \cancel{c e^x x} + e^x$

$c e^x = e^x$

$c = 1$

$\bar{y}_2(x) = e^x x$

Allora $\bar{y}(x) = -2x - 2 + x e^x$

La sol generale è $y(x) = \bar{y}(x) + Ke^x$.

Equazioni di I ordine a variabili separabili:

$y' = g(x)\, h(y)$

Se $h(y) = y$ l'eq è $y' = g(x)\, y$ è lineare omogenea.

Idea per la risoluzione:

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,dx = \int g(x)\,dx$$

Calcolando i due integrali:

$$\int g(x)\,dx = G(x) + c_1$$ con G primitiva di g.

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,dx \overset{y=y(x),\ dy=y'(x)dx}{=} \int \frac{dy}{h(y)} = H(y) + c_2$$

dove H è una primitiva di $\frac{1}{h}$

$$= H(y(x)) + c_2$$

Allora:

$$H(y(x)) + c_2 = G(x) + c_1$$

$$H(y(x)) = G(x) + \underbrace{c_1 - c_2}_{=c}$$

$$H(y(x)) = G(x) + c.$$

Se H si può invertire, allora:

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + c).$$

Attenzione:

- Questo procedimento permette di trovare solo le soluzioni per cui $h(y(x)) \neq 0$.
- C'è bisogno di invertire H.
  (spesso anche considerare un problema di Cauchy invece dell'equazione senza ulteriori condizioni)

Notazioni

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme delle funzioni continue su A si indica con $C(A)$ o $C^0(A)$

Quindi

$$C(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } A \}$$

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è DI CLASSE C^1 in I se f è derivabile in I e $f' \in C(I)$.
L'insieme delle funzioni di classe C^1 si indica con $C^1(I)$.

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è di CLASSE C^k con $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, se f è derivabile k volte in I e $f^{(k)} \in C(I)$.

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ (TEOREMA DI CAUCHY PER ODE)

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli e siano $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ tali che $g \in C(I)$, $h \in C^1(J)$.
Siano inoltre $x_0 \in I$, $y_0 \in J$. Allora $\exists\, I_0 \subseteq I$ intervallo e $\exists!\, y : I_0 \to J$ tale che $x_0 \in I_0$ e

$$y'(x) = g(x)\, h(y(x)) \quad \forall x \in I_0 \quad \text{e} \quad y(x_0) = y_0.$$

Cioè $\exists$ un'unica soluzione di

$$\begin{cases} y' = g(x)\, h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{in } I_0$$