# Lezione 23

lunedì 22 novembre 2021 11:19

## POLINOMI DI TAYLOR

- Siano $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$.
Se $f$ è derivabile in $x_0$ allora possiamo definire la retta tangente al grafico di $f$ in $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Abbiamo detto che:

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))}{(x - x_0)} = 0$$

- La distanza tra $f(x)$ e $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ tende a 0 per $x \to x_0$ più rapidamente della distanza tra $x$ e $x_0$.

- Il polinomio $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è l'unico polinomio di grado $\leq 1$ che soddisfa la proprietà $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = 0$.

**OSS**

Si ha $T_1(x_0) = f(x_0)$ e $T_1'(x_0) = f'(x_0)$.

**Domanda**:

È possibile approssimare $f$ con un polinomio di grado 2?

- Siano $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Assumiamo che $f$ sia 2 volte derivabile in $x_0$.

Cerchiamo un polinomio di grado 2 (chiamiamolo $T_2(x)$) tale che $T_2(x_0) = f(x_0)$, $T_2'(x_0) = f'(x_0)$
$T_2''(x_0) = f''(x_0)$.

$$Ax^2 + Bx + C \quad \text{(polinomio di 2° grado)}$$

In realtà conviene traslare in $x_0$ e scrivere:

$$T_2(x) = A(x-x_0)^2 + B(x-x_0) + C.$$

$$T_2'(x) = 2A(x-x_0) + B$$

$$T_2''(x) = 2A$$

$$T_2(x_0) = C \quad , \quad T_2'(x_0) = B \quad , \quad T_2''(x_0) = 2A$$

Vogliamo: $C = f(x_0)$ , $B = f'(x_0)$ , $2A = f''(x_0)$.

$T_2$ deve essere:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

Questo è il polinomio le cui derivate di ordine 0, 1, 2 coincidono con quelle di $f$ nel punto $x_0$.

**OSS**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

**DIM**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left( f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \right)}{(x-x_0)^2} \qquad \text{f.r. } \frac{0}{0}$$

$$\overset{D.L.H\ ?}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$= \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{2} = 0. \qquad \square$$

---

## Simboli di Landau ( o piccolo )

**Notazione :**
Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite in $(a,b)$.
Sia $x_0 \in [a,b]$. Diremo che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

ESEMPI

- $f(x) = \sin x \quad , g(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

$\sin x = o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$.

- Si può anche scrivere che $\sin x = o(1)$ per $x \to 0$.

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

si può scrivere che $\sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$.
Questa relazione ci dice che:

$\sin x = x + o(x)$.

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\xrightarrow{x\to 0} 0} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \quad 0\cdot\infty.$$
  f.i.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \iff \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$$
  quindi $e^x - 1 - x = o(x)$
  cioè $e^x = 1 + x + o(x)$

- $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$
  quindi $\sin x = o(x)$ per $x \to +\infty$.
  informazione molto debole

- $$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$$
  possiamo scrivere che $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$.

OSSERVAZIONI:

- Le uguaglianze con i simboli di Landau si leggono in una sola direzione
  $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$.
- Se $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ allora:
  $o(c f(x)) = o(f(x))$
- $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$
- $o(o(f(x))) = o(f(x))$
  $$\frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \xrightarrow{x\to 0} 0$$
  $$\frac{o(o(f(x)))}{f(x)} = \frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0.$$

- Se $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ allora $x^n = o(x^m)$ per $x \to 0$.

---

- **Derivate di ordine superiore.**

**Def.** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Si dice che $f$ è DERIVABILE N-VOLTE in $x_0$ se $f$ è derivabile $n-1$ volte in tutti i punti di un intorno di $x_0$ e se $f^{(n-1)}$ è derivabile in $x_0$.

La derivata di ordine $n$ si indica con $f^{(n)}(x_0)$ o $\frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x = x_0}$.

**OSS** (derivate delle potenze)

$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$. Allora:

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1) x^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot x^{n-k}$$

In particolare:

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$

**Def:** Dato $n \in \mathbb{N}$, la quantità $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ si dice FATTORIALE di $n$ e si indica con $n!$

$$n! = n(n-1) \ldots \cdot 1$$

Si definisce anche $0! = 1$.

ESEMPI

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 6 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 24 = 120$.

OSS

1) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad (n+1)! = (n+1)\, n!$

2) Se $f(x) = x^n$, $\quad f^{(n)}(x) = n!$

3) Se $f(x) = x^n$,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{se } 0 \leq k < n \\ n! & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

---

**Def** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che $f$ sia derivabile $n$ volte in $x_0$ ($f$ è derivabile $n-1$ volte nei punti vicini a $x_0$).

Definiamo POLINOMIO DI TAYLOR DI F DI ORDINE/GRADO n NEL PUNTO $x_0$ il polinomio

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

OSSERVAZIONE

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall\ 0 \leq k \leq n.$$

## TEOREMA DI PEANO

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$.
Se $f$ è derivabile $n$ volte in $x_0$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

cioè $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$

<u>Nota</u>: Si può anche dimostrare che $T_n$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$

---

## Simboli di sommatoria:

E' scomodo scrivere:

$$\underbrace{f(x_0)}_{a_0} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{a_1} + \dots \dots \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{a_n}$$

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

### Notazione

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e siano $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_1 \leq n_2$. Allora denotiamo

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k := a_{n_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots \dots + a_{n_2}$$

ESEMPI

- $$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=2}^{5} (-1)^k k = (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + (-1)^4 \cdot 4 + (-1)^5 \cdot 5$$
$$= 2 - 3 + 4 - 5 = -2 .$$

OSS

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ESEMPI DI POLINOMI DI TAYLOR

1) $f(x) = e^x \quad , \quad x_0 = 0$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$ $\qquad f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = e^x$

$\vdots$ $\qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$

$f^{(n)}(x) = e^x$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!_{6}}x^3 + \dots \frac{1}{n!}x^n$$

Il teorema di Peano ci dice che:

$e^x = T_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$. Ad esempio:

$n=3$ : $\quad e^x = T_3(x) + o(x^3)$

$$= 1 + x + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}_{o(x)}$$

ESEMPIO DI CALCOLO DI LIMITI :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Approssimiamo $e^x$ con il polinomio di Taylor di ordine 2:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\searrow 0$ per $x \to 0$.

2) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 3$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(x_0) = e^3$

$$T_3(x) = e^3 + e^3(x-3) + \frac{1}{2}e^3(x-3)^2 + \frac{1}{6}e^3(x-3)^3$$

oss

In questo esempio il polinomio di Taylor con $x_0 = 3$ si può ricavare da quello con $x_0 = 0$.

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 3$

$f(x) = e^{x-3+3} = e^3 e^{x-3}$ $\quad x-3 \xrightarrow{x \to 0} 0$

So che per $y \to 0$, $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$

quindi $e^{x-3} = 1 + (x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{6}(x-3)^3 + o((x-3)^3)$

$$e^x = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2}(x-3)^2 + \frac{e^3}{6}(x-3)^3 + o((x-3)^3)$$

Nota:

A volte è importante specificare la funzione e il punto $x_0$ in cui consideriamo il polinomio di Taylor. Si può utilizzare la notazione $T_n[f, x_0](x)$ al posto di $T_n(x)$.

Ad esempio per $f(x) = e^x$

$$T_3[f,0](x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$T_3[f,3](x) = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2}(x-3)^2 + \frac{e^3}{6}(x-3)^3$$

## Altri sviluppi di Taylor noti:

3) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

4) $$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

5) $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$