ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

1) Sia $z = \frac{5i-3}{1+4i}$

- Determinare la forma algebrica di z
- Calcolare z^7

Soluzione:

- $$\frac{5i-3}{1+4i} = \frac{(5i-3)(1-4i)}{17}$$
$$= \frac{5i - 3 - 20i^2 + 12i}{17} = \frac{17i+17}{17}$$
$$= i+1 = 1+i$$

- z^7

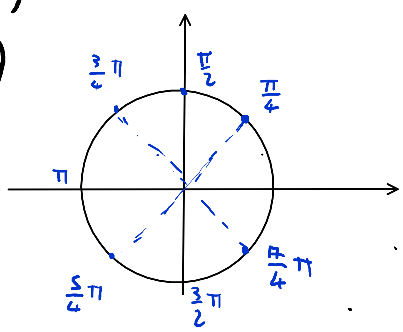
$z = 1+i \qquad x=1, \quad y=1$

$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

- Sappiamo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$:
$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$$

- $$z^7 = (\sqrt{2})^7 \left(\cos\left(\tfrac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{4}\pi\right)\right)$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{4}\pi\right)\right)$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$= 8 - 8i.$$



Nota: esempi di calcoli con le radici

- $(\sqrt{6})^4 = \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 6^2 = 36$

- $(\sqrt{6})^4 = (6^{\frac{1}{2}})^4 = 6^2 = 36$
- $(\sqrt{6})^5 = (\sqrt{6})^4\sqrt{6} = 36\sqrt{6}$
- $(\sqrt{2})^7 = (\sqrt{2})^6\sqrt{2} = 2^3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
- $(\sqrt{14})^{10} = 14^5$
- $(\sqrt[3]{10})^{10} = (\sqrt[3]{10})^9\sqrt[3]{10} = (10^{\frac{1}{3}})^9\sqrt[3]{10}$
  $= 10^3\sqrt[3]{10} = 1000\sqrt[3]{10}$

---

2) Sia $z = \dfrac{3+i}{1-i}$
- Scrivere la forma algebrica di z
- Calcolare $(z-3i)^9$

Soluzione:

$$z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{2} = \frac{3+i+3i+i^2}{2}$$
$$= \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

Calcolare $(z-3i)^9$.

Sia $w = z-3i$. So che $z = 1+2i$ quindi
$w = z-3i = 1+2i-3i = 1-i$

$w = 1-i \quad (x=1,\ y=1)$

Quindi:

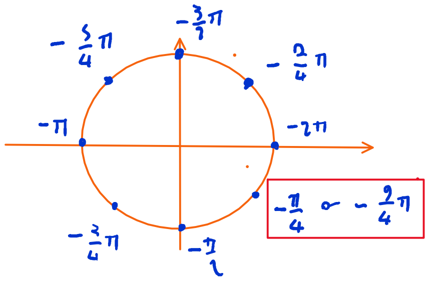
$|w| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ e

$\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{4}.$

Utilizzando la formula per le potenze dei numeri complessi troviamo che:

$$w^9 = (\sqrt{2})^9 \left(\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right)\right)$$
$$= 16\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$= 16 - 16i$$

Abbiamo usato che



$$\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\operatorname{sen}\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Forma trigonometrica o esponenziale di un numero complesso

Def: Se $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$. Si definisce
$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y) \qquad \text{(ESPONENZIALE COMPLESSO)}$$
In particolare $e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Ogni numero complesso $z = x + iy$. Si può scrivere come
$$z = x + iy \qquad \text{(FORMA ALGEBRICA)}$$
$$= |z|\cos\varphi + i\,|z|\sin\varphi.$$
$$= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \text{(FORMA TRIGONOMETRICA)}$$
$$= |z|e^{i\varphi} \qquad \text{(FORMA ESPONENZIALE)}$$

La formula esponenziale è comoda per il calcolo delle potenze:
$$z^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n (e^{i\varphi})^n$$
$$= |z|^n e^{in\varphi}$$
$$= |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

ESERCIZIO

Sia $z = 2i + 1$. Scrivere in forma esponenziale le radici quadrate di $w = z - i$.

. $w = z - i = 1 + 2i - i = 1 + i$

$$|w| = \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Radici quadrate:

$$\sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)\right) \quad k = 0,1.$$

$$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right)$$

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right)$$

$$\sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)} \quad \text{con} \quad k = 0, 1.$$

Abbiamo usato che

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Due radici quadrate

- $\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$ $(k=0)$
- $\sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{9}{8}\pi}$ $(k=1)$

ESERCIZIO

Sia $z = \frac{1+2i}{3+i}$. Determinare la forma algebrica di z e calcolare z^9.

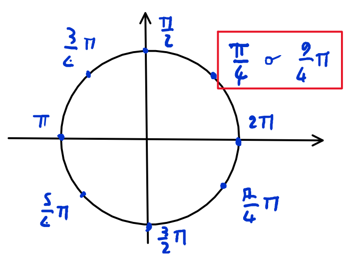
$$z = \frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3+6i-i-2i^2}{9+1} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

$$z = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2} \qquad \left(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}\right)$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \sin\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$



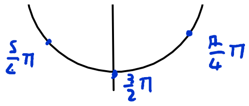
$$z^9 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9\left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{i}{32}$$



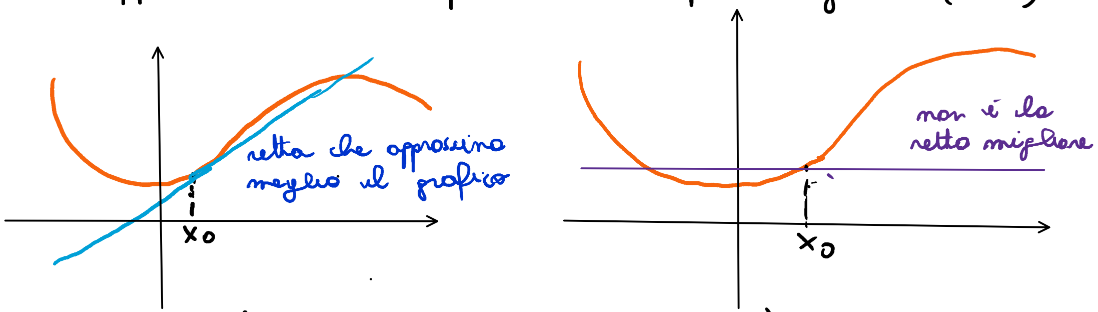
Nota

$$\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^8 = \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^8 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Polinomi di Taylor.

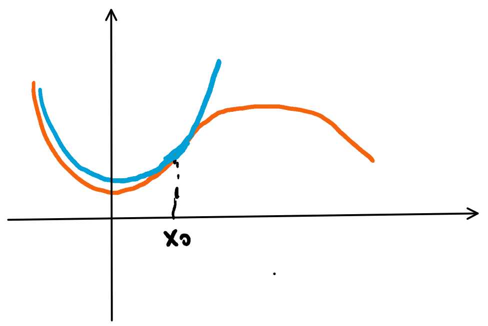
Vogliamo approssimare funzioni come esponenziali log / sen / cos / artan ... con dei polinomi nel miglior modo possibile

- Se approssimiamo con polinomi di primo grado (rette)



C'è una retta (polinomio di 1° grado) che approssima il grafico di f meglio di tutte le altre rette vicino al punto x_0

- Se approssimiamo con polinomi di II grado:



Si può dimostrare che c'è una parabola che approssima il grafico di f meglio di tutte le altre parabole.

In generale per "molte" funzioni, fissato un

In generale per "molte" funzioni, fissato un punto x_0 e $n \in \mathbb{N}$, esiste un polinomio di grado al più n che approssima f meglio di tutti gli altri polinomi di grado $\leq n$ vicino al punto x_0. Questo polinomio è il **POLINOMIO DI TAYLOR** di ordine n e di centro x_0 per f.

ESEMPI

Funzione esponenziale:

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0$$

$$P_{n,x_0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

FATTORIALE DI UN NUMERO NATURALE

$n!$ significa:

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

- $n = 1$

$$P_{1,x_0,f}(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} =$$

$$= \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} = 1 + x$$

- $n = 2$

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- $n = 3$

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

- $n = 4$

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

TEOREMA DI PEANO (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

$$f(x) = P_{n,x_0,f}(x) + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{quantità trascurabile rispetto a } (x-x_0)^n}$$

quantità trascurabili rispetto a $(x-x_0)^n$

ESEMPIO

$f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$

Polinomi di Taylor

$n=1 \quad 1+x$

$n=2 \quad 1+x+\frac{1}{2}x^2$

$n=3 \quad 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$

Formule di Taylor

$e^x = 1+x+o(x)$

$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

ESEMPIO DI UTILIZZO NEL CALCOLO DEI LIMITI

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2+2x^3}$$

Approssimiamo e^x con il suo pol. di Taylor di ordine 2:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\cancel{-1}\cancel{-x}}{x^2+2x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

E se avessimo usato il polinomio di grado 1?

$$e^x = 1+x+o(x)$$

$$\frac{e^x-1-x}{x^2+2x^3} = \frac{\cancel{1}+\cancel{x}+o(x)\cancel{-1}\cancel{-x}}{x^2+2x^3} = \frac{o(x)}{x^2+2x^3}$$

non riesco a concludere perché non so con esattezza come si comporta il numeratore.

E se avessimo usato il polinomio di Taylor di ordine 3?

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{e^x-1-x}{x^2+2x^3} = \frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\cancel{-1}\cancel{-x}}{x^2+2x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2+2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Negli sviluppi di Taylor si possono fare delle sostituzioni

$$e^{x^2}\overset{(y=x^2)}{=}e^y=1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$$
$$=1+x^2+\frac{1}{2}(x^2)^2+o((x^2)^2)$$
$$=1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$$

$$e^{-2x^2}\overset{(y=-2x^2)}{=}e^y=1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$$
$$=1+(-2x^2)+\frac{1}{2}(-2x^2)^2+o((-2x^2)^2)$$
$$=1-2x^2+\frac{1}{2}4x^4+o(4x^4)$$
$$=1-2x^2+2x^4+o(x^4)$$

PROPRIETÀ DEI SIMBOLI DI LANDAU $(o(x^n))$

- $o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m})$ $\quad(o(x^2)\,o(x^3)=o(x^5))$
- $x^n\,o(x^m)=o(x^{n+m})$
- $o(x^n)+o(x^m)=o(x^{\min\{n;m\}})$ $\quad(o(x^2)+o(x^3)=o(x^2))$
- $o(c\,x^n)=o(x^n)\quad\forall c\in\mathbb{R}, c\neq 0$ $\quad o(2x^{11})=o(x^{11})$
- $c\,o(x^n)=o(x^n)\quad\forall c\in\mathbb{R}, c\neq 0.$
- $-o(x^n)=o(x^n)$
- $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$
- $(o(x^n))^m=o(x^{nm})$

Altri polinomi di Taylor

• $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{m} x^n + o(x^m)$

$m = 1$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ | $P_{1,x_0,f}(x) = 1 + x$

$m = 4$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$

• $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^m)$

$\boxed{m = 2}$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^2)$

$= (-1)^2 \frac{x}{1} + (-1)^3 \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\boxed{m = 4}$

$(-1)^2 \frac{x}{1} + (-1)^3 \frac{x^2}{2} + (-1)^4 \frac{x^3}{3} + (-1)^5 \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots\ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1})$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+1})$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3$

$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \ldots\ldots$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4+\cdots\cdots$$

ESEMPI

- $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad(\alpha=\frac{1}{2})$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

- $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ $\quad(\alpha=\frac{1}{3})$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2+o(x^2)$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\sin x-\arctan x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$$

$$=\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\cancel{-x}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}=\frac{1}{6}$$

ESERCIZIO

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^2 - \ln(1+x^2)}$$

Denominatore

$$\ln(1+x^2) \overset{y=x^2}{=} \ln(1+y)$$
$$= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$= x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2)$$
$$= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$x^2 - \ln(1+x^2) = x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$
$$= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Numeratore:

$$\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{(x^2)^2}{2^2} = \frac{x^4}{4}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \overset{y=-\frac{x^2}{2}}{=} e^y$$
$$= 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$
$$= 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + o\left(\frac{1}{4}x^4\right)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$N(x) = \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) + o(x^2) = o(x^2)$$ NON BASTA

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$N(x) = \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \quad - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$= \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

Il limite si riduce a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4}{\frac{x^4}{2}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+2x) + 2x^3 - 2\arctan(x^2)}{\underbrace{e^{2x^4} - 1}}$$

• Denominatore:

$$e^{2x^4} \overset{y=2x^4}{=} e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$
$$= 1 + 2x^4 + \frac{1}{2}(2x^4)^2 + o((2x^4)^2)$$
$$= 1 + 2x^4 + 2x^8 + o(x^8)$$

$$D(x) = e^{2x^4} - 1 = 2x^4 + \underbrace{2x^8}_{\text{NON OBBLIG}} + o(x^8)$$

Va bene ma si poteva fare lo sviluppo con un termine in meno:

$$e^{2x^4} = e^y = 1 + y + o(y)$$
$$= 1 + 2x^4 + o(x^4)$$
$$D(x) = e^{2x^4} - 1 = \cancel{1} + 2x^4 + o(x^4) \cancel{-1} = 2x^4 + o(x^4)$$

Numeratore

$$\underbrace{x\ln(1+2x)} + 2x^3 - 2\arctan(x^2)$$

$$\ln(1+2x) \overset{y=2x}{=} \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$
$$= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o((2x)^3)$$

$$= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o((2x)^3)$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(8x^3)$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$x \ln(1+2x) = 2x^2 - 2x^3 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\arctan(x^2) \overset{y=x^2}{=} \arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}(x^2)^3 + o((x^2)^3)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

$$N(x) = x\ln(1+2x) + 2x^3 - 2\arctan(x^2)$$

$$= 2x^2 - \cancel{2x^3} + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) + \cancel{2x^3} - 2\left(x^2 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)\right)$$

$$= \cancel{2x^2} + \frac{8}{3}x^4 + \underline{o(x^4)} - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^6 + \underline{o(x^6)}$$

$$= \frac{8}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{8}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$