Esercizi della scorsa lezione:

ESERCIZIO 3

$$\frac{|x-2|}{x-3} \geq 2$$

$$\frac{|x-2|}{x-3} - 2 \geq 0$$

$$\frac{|x-2| - 2(x-3)}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{|x-2| - 2x + 6}{x-3} \geq 0$$

Iniziamo lo studio del segno:

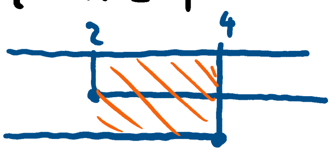
Numeratore: $|x-2| - 2x + 6 \geq 0$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 - 2x + 6 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2 < 0 \\ -(x-2) - 2x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ -x + 4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \\ -x + 2 - 2x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

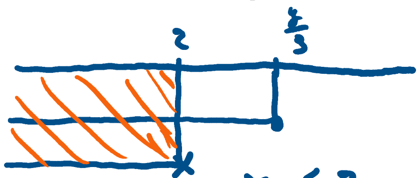
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ -x \geq -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \\ -3x + 8 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \\ -3x \geq -8 \end{cases}$$



$2 \leq x \leq 4$

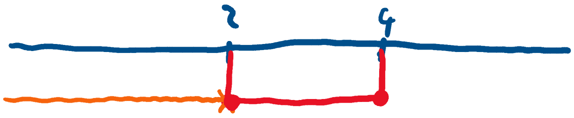
$$\begin{cases} x < 2 \\ x \leq \frac{8}{3} \end{cases}$$



$x < 2$

$2 \le x \le 4 \quad \vee \quad x < 2$

cioè

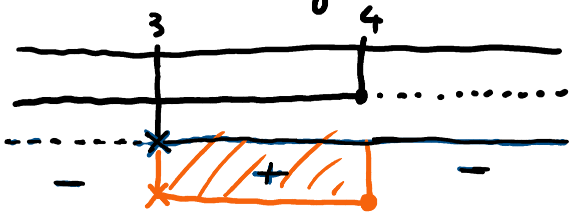


$x \le 4$

$|x-2| - 2x + 6 \ge 0 \iff x \le 4$.

Denominatore: $x - 3 > 0 \iff x > 3$

Studio del segno:



Soluzione: $3 < x \le 4$.

ESERCIZIO 4

$$\frac{x-3}{|2x-1| - x} > 0$$

Studio del segno:

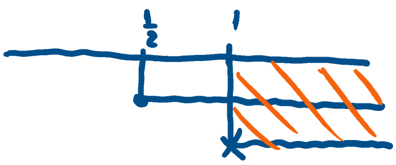
Numeratore $x - 3 \ge 0 \iff x \ge 3$

Denominatore: $|2x-1| - x > 0$

$$\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2x-1-x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ -(2x-1) - x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x - 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -2x+1-x > 0 \end{cases}$$

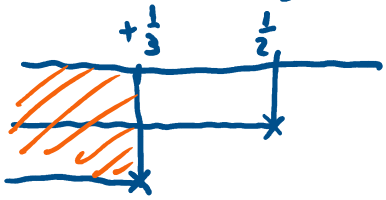
$$\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -3x+1 > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -3x > -1 \end{cases}$$

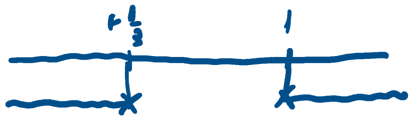
$x > 1$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x < +\frac{1}{3} \end{cases}$$

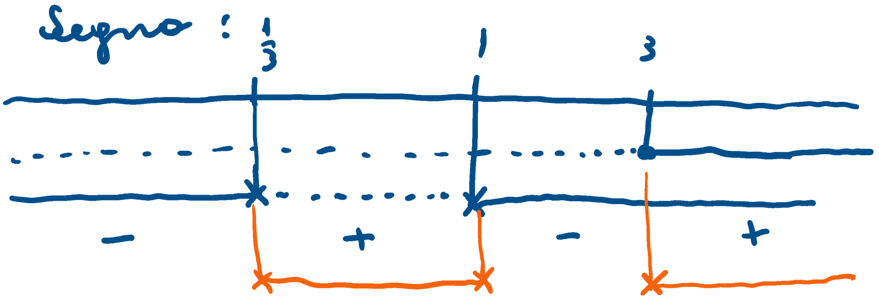


$x < +\frac{1}{3}$

$x > 1 \quad \vee \quad x < +\frac{1}{3}$



Segno :



> 0

Soluzione : $\frac{1}{3} < x < 1 \quad \vee \quad x > 3.$

Osservazioni sulle diseq. di I grado

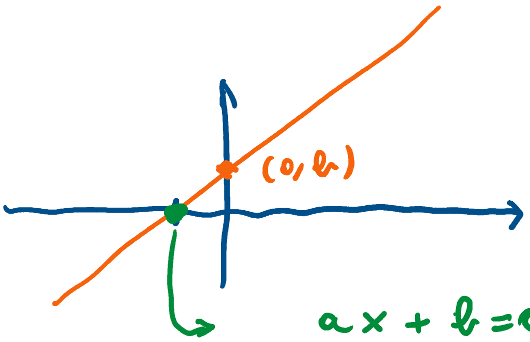
$ax + b > 0$

Consideriamo la funzione $f(x) = ax + b$.

Il grafico della funzione è l'insieme delle coppie (x, y) con $y = ax + b$.

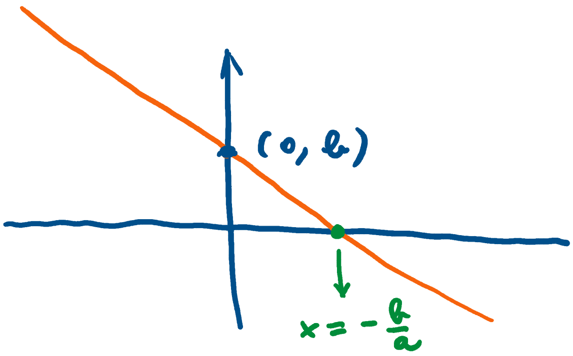
Per le disequazioni di I° grado questo grafico è una retta la cui pendenza dipende da a e la cui intersezione con l'asse y dipende da b.

• $a > 0$

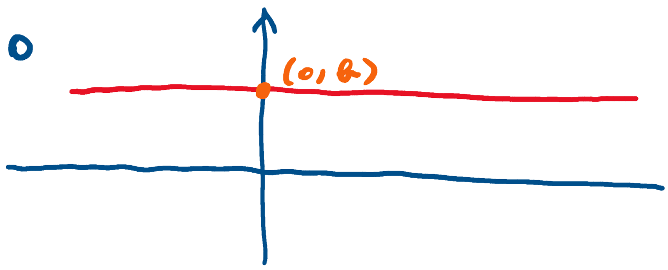


$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$

• $a < 0$



• $a = 0$



$y = b$

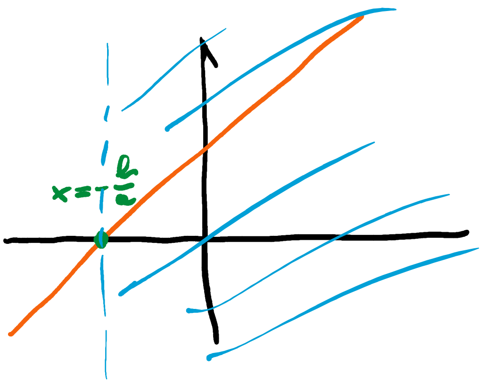
Consideriamo una disequazione
$ax + b \geq 0$.
Risolvere questa disequazione significa trovare gli x per cui il grafico della funzione $f(x) = ax + b$ sta sopra l'asse x

• $a > 0$

$ax + b \geq 0$

$ax \geq -b$

$x \geq -\frac{b}{a}$



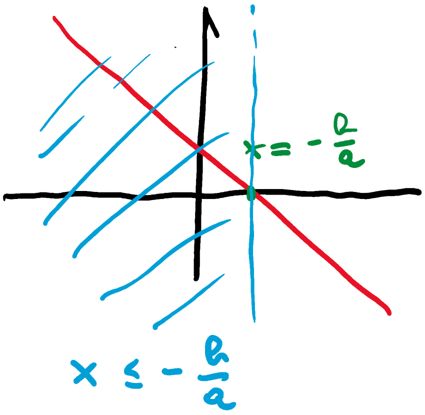
$x \geq -\frac{b}{a}$

- $ax + b \geq 0 \qquad a < 0$

$ax + b \geq 0$

$ax \geq -b$

$x \leq -\frac{b}{a}$



Disequazioni di II grado :

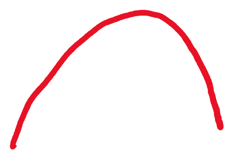
$ax^2 + bx + c \geq 0$

Per risolvere la diseq. bisogna trovare gli x per cui il grafico di $f(x) = ax^2 + bx + c$ sta sopra l'asse orizzontale.

Se $a \neq 0$, il grafico è una parabola la cui concavità dipende da a

$a > 0$

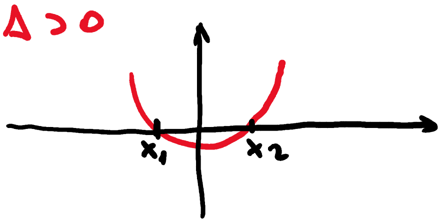
$a < 0$



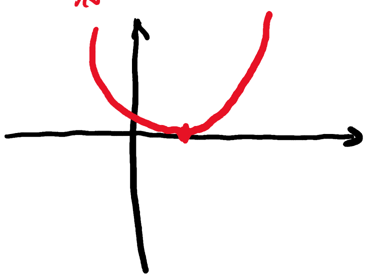
Inoltre posto $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Se $\Delta > 0$: la parabola interseca l'asse x in due punti $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Se $\Delta = 0$ la parabola interseca l'asse in un solo punto $x = -\frac{b}{2a}$
- Se $\Delta < 0$ la parabola non interseca mai l'asse x.

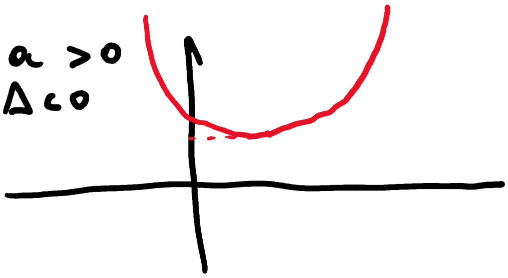
$a > 0$
$\Delta > 0$



$a > 0$
$\Delta = 0$



$a > 0$
$\Delta < 0$



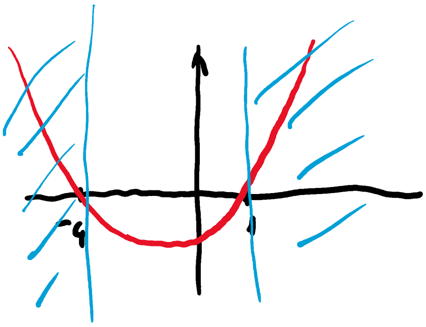
ESEMPI

1) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

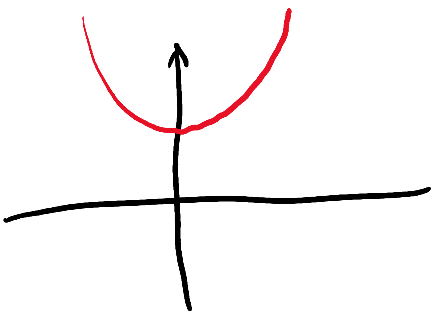
$x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq -4$



2) $x^2 + x + 1 \geq 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$

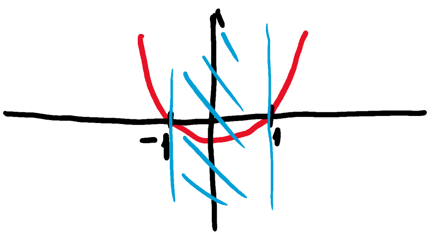
Soluzioni della disequazione: $\forall x \in \mathbb{R}$



3) $x^2 - 1 < 0$

$(x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1)$

$\left(\Delta = 0^2 + 4 , \quad x_{1,2} = \dfrac{0 \pm \sqrt{4}}{2} = \pm \dfrac{2}{2} = \pm 1 \right)$



$x^2 - 1 < 0$

$-1 < x < 1$

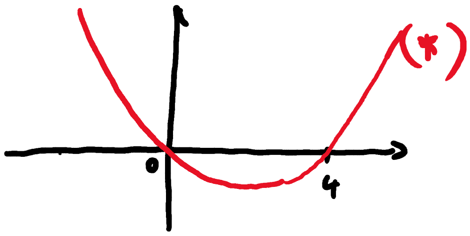
4)

$$4x - x^2 > 0$$

$$-4x + x^2 < 0$$

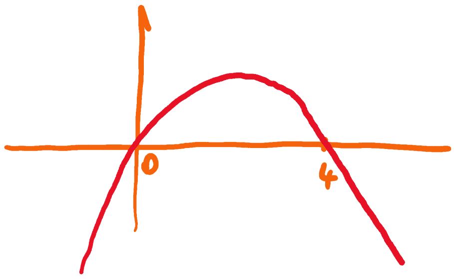
$$x^2 - 4x < 0 \quad (*)$$

$$(x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0 \vee x = 4)$$



$$0 < x < 4$$

$$4x \underbrace{-x^2} > 0$$

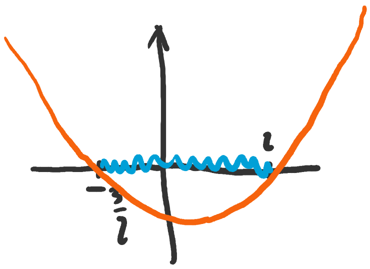


$$0 < x < 4$$

5) $2x^2 - x - 6 \le 0$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$



$$-\frac{3}{2} \le x \le 2.$$

- Se $a > 0$ e $\Delta > 0$

$ax^2 + bx + c \ge 0$ valori esterni

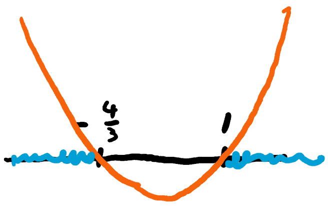
$ax^2 + bx + c \le 0$ valori interni

6) $$\frac{2x - 1}{3x^2 + x - 4} \le 0$$

Numeratore: $\quad 2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$

Denominatore:

$3x^2 + x - 4 > 0$

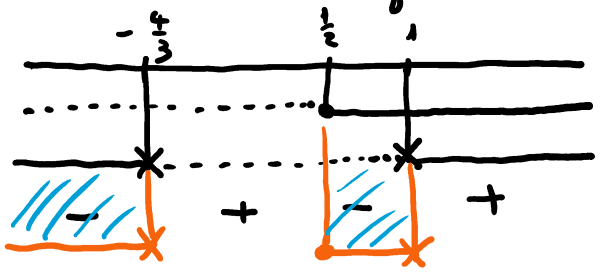


$\Delta = 1 + 48 = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$x < -\frac{4}{3} \quad \vee \quad x > 1.$

studio del segno:



$\leq$

$x < -\frac{4}{3} \quad \vee \quad \frac{1}{2} \leq x < 1.$

Numeri complessi

Si introduce un numero i tale che $i^2 = -1$

Un numero complesso è un numero della forma $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

ESEMPI

$z = 2 + i$

$z = \pi - 3i$

$z = \sqrt{3} - 7i$

$i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$

Utilizzando i numeri complessi è sempre possibile risolvere un'equazione di secondo grado:

ESEMPIO

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Se risolviamo con i numeri reali:

$\Delta = 9 - 20 = -11$

l'equazione non ha soluzioni reali.

- Se risolviamo con i numeri complessi

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} \qquad \text{e} \quad \sqrt{-11} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{11} = i\sqrt{11}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

ESEMPIO

$$x^2 + 4 = 0$$

$x^2 = -4$ (in $\mathbb{R}$ non ci sono soluzioni)

In $\mathbb{C}$ sì

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-1 \cdot 4} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{4} = \pm i \cdot 2 = \pm 2i$$

Ogni numero complesso si può scrivere in diversi modi.

La rappresentazione $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si dice rappresentazione / forma

ALGEBRICA / CARTESIANA.

ESEMPIO

- $z = (3+i)(2-i)$

è un numero complesso ma non è scritto in forma algebrica.

Per scriverlo in forma algebrica devo svolgere i conti:

$$(3+i)(2-i) = 6 + 2i - 3i - i^2$$
$$= 6 - i - i^2$$
$$= 6 - i - (-1) =$$
$$= 6 - i + 1$$
$$= 7 + i$$ forma algebrica.

$$(\underbrace{7}_{x} + i \cdot \underbrace{1}_{y})$$

- $$z = \frac{3+i}{1+i}$$

Moltiplico e divido per $1 - i$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$= \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3 + i - 3i - i^2}{1^2 - i^2}$$

$$= \frac{3 - 2i + 1}{1 - (-1)} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

(forma algebrica del numero)

ESEMPIO

$$z = \frac{6 - 7i}{1 - 2i}$$

determinare la forma algebrica di z.

Moltiplico e divido per $1 + 2i$

$$\frac{6-17i}{1-2i}$$

denominatore: $1-2i$
moltiplico e divido per $1+2i$

$$\frac{6-17i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}$$
$$=\frac{(6-17i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$=\frac{6-17i+12i-14\overset{-1}{i^2}}{1^2-(2i)^2}$$
$$=\frac{6-17i+12i-14\cdot(-1)}{1-4i^2}$$
$$=\frac{6+14+5i}{1+4}=\frac{20+5i}{5}=\frac{20}{5}+\frac{5i}{5}$$
$$=4+i.$$

ESEMPIO

- $z=3+i$ chi è $\frac{1}{z}$?

$$\frac{1}{3+i}=\frac{3-i}{(3+i)(3-i)}=\frac{3-i}{9-i^2}=\frac{3-i}{10}$$
$$=\frac{3}{10}-\frac{i}{10}$$

$$(3+i)\cdot\left(\frac{3}{10}-\frac{i}{10}\right)$$
$$=\frac{9}{10}-\cancel{\frac{3i}{10}}+\cancel{\frac{3i}{10}}-\frac{i^2}{10}=\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=1.$$

OSSERVAZIONE: Potenze di i:

$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1.$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

CURIOSITÀ: FORMULA DI TARTAGLIA / CARDANO

$x^3 + px + q = 0$. Una soluzione è

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

ESEMPIO

$x^3 - x = 0$ $\qquad p = -1$, $q = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \ \vee \ x^2 - 1 = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = \pm 1.$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{i}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{i}{\sqrt{27}}} = \sqrt[3]{\frac{i}{27}} - \sqrt[3]{\frac{i}{27}} = 0$$

ESEMPIO

$$z = \frac{2+3i}{3-2i}$$

Determinare la forma algebrica di z

$$\frac{2+3i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{6+4i+9i+6i^2}{9-4i^2} \qquad \boxed{i^2 = -1}$$

$$= \frac{13i}{9+4} = \frac{13i}{13} = i$$

ESEMPIO

$$z = \frac{2i - 1}{1 + i}$$

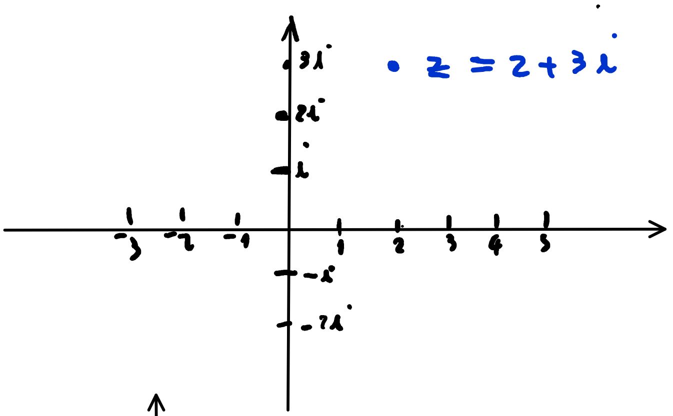
$$\frac{2i-1}{1+i} = \frac{2i-1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} =$$

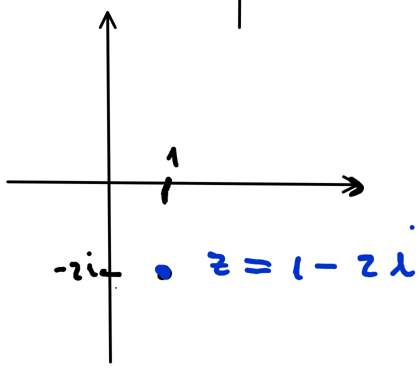
$$= \frac{2i - 2i^2 - 1 + i}{1 - i^2} = \frac{3i+1}{2}$$

$$= \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

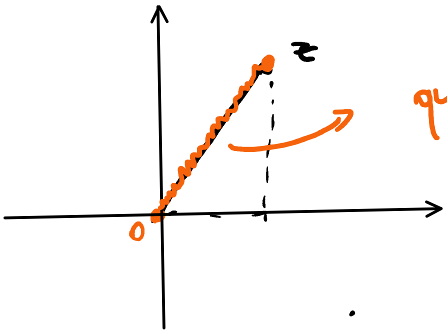
Rappresentazione grafica dei numeri complessi

Ogni numero complesso $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si può rappresentare su un piano





Def La distanza di un numero complesso da 0 si dice MODULO di z. Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, allora $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$



questa lunghezza è $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

ESEMPI

- $z = 3 + 4i$

  $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

- $z = -1 + i$ $\quad (x = -1, \ y = 1)$

  $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

- $z = 3 - 2i$ $\quad x = 3, \ y = -2$

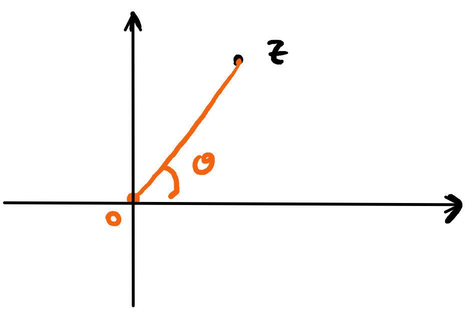
  $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

- $z = 7i$ $\ (0 + 7i)$ $\quad x = 0, \ y = 7$

  $|z| = \sqrt{7^2} = 7$

- $z = -4$ $\ (-4 + 0 \cdot i)$ $\quad x = -4, \ y = 0$

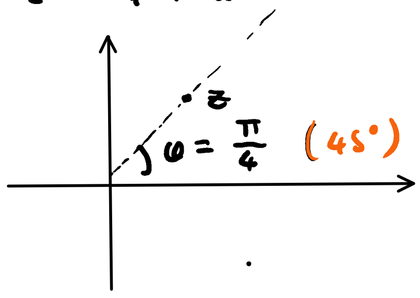
  $|z| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$



Def Se $z \neq 0$, l'angolo formato dal segmento tra 0 e z e dal semiasse positivo delle x è detto ARGOMENTO di z ($\arg(z)$)

è detto ARGOMENTO di z ($\arg(z)$)

- $z = 1 + i$ $\quad (x = 1 \;,\; y = 1)$



$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

Modulo e argomento sono utili per calcolare potenze e radici

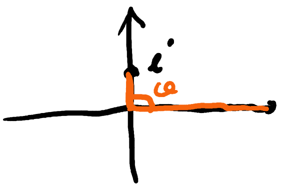
Idea:

Se si conoscono $|z|$ e $\varphi = \arg(z)$ si può calcolare z^n perché z^n è il numero complesso che ha per modulo $|z|^n$ e per argomento $n\varphi$.

ESEMPIO

$z = i$ $\quad |z| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$



quindi z^n è il numero complesso che ha ha modulo $|z|^n = 1^n = 1$ e argomento $n \cdot \frac{\pi}{2}$