UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

CONSIGLIO INTERCLASSE IN MATEMATICA

CORSO DI STUDIO	**LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA (LM-40)**
ANNO ACCADEMICO	**2023-2024**
INSEGNAMENTO	**GEOMETRIA SUPERIORE 2**

Principali informazioni sull'insegnamento	
Anno di corso	Secondo
Periodo di erogazione	Secondo semestre (26 febbraio 2024 – 31 maggio 2024)
Crediti formativi universitari (CFU)	7
Settore scientifico disciplinare (SSD)	MAT/03 – Geometria
Lingua di erogazione	Italiano
Modalità di frequenza	Facoltativa (la frequenza è fortemente consigliata)

Docenti	
Nome e cognome	Antonio Lotta
Indirizzo mail	antonio.lotta@uniba.it
Telefono	+39 080 544 2682
Sede	Dipartimento di Matematica, stanza 2 terzo piano
Sede virtuale	Microsoft Teams
Pagina web	https://www.dm.uniba.it/it/members/lotta
Ricevimento	Su appuntamento, da concordare via e-mail

Organizzazione della didattica				
	Totali	Didattica frontale	Pratica	Studio individuale
Ore	175	56		119
CFU	7	7		

Obiettivi formativi	
	Acquisizione di alcuni argomenti avanzati di Geometria Riemanniana, con particolare riferimento alla teoria degli spazi omogenei, degli spazi simmetrici e delle sommersioni Riemanniane.

Prerequisiti	
	Nozioni fondamentali riguardanti varietà differenziabili e gruppi di Lie. Nozioni di base riguardanti le metriche Riemanniane: connessione di Levi-Civita, geodetiche, curvatura.

Syllabus	
Contenuti dell'insegnamento (Programma)	**Richiami sulle applicazioni differenziabili tra varietà.** Richiami sulle sottovarietà, cenno alla differenza tra sottovarietà immerse e regolari (embedded). Richiamo sul Teorema dei valori regolari; esempio: il gruppo ortogonale O(n) è una sottovarietà regolare di GL(n,R). Controimmagine di una sottovarietà regolare mediante una sommersione surgettiva. Richiamo sulla struttura locale delle applicazioni differenziabili di rango costante e conseguenze. Esistenza di sezioni locali per una sommersione. Il Lemma di Baire. Ogni applicazione differenziabile di rango costante surgettiva è una sommersione.

Spazi omogenei. Azioni differenziabili di gruppi di Lie su varietà. Campi vettoriali fondamentali. Quoziente di una varietà per una relazione di equivalenza regolare: Teorema di Godement. Quoziente di un gruppo di Lie per un suo sottogruppo chiuso. Ogni G-spazio omogeneo è un coset space a meno di diffeomorfismo G-equivariante. Le orbite di un’azione sono sottovarietà immerse. Esempi di spazi omogenei: varietà di Grassmann, varietà di Stiefel, varietà ban- diera reali. Embedding della grassmanniana dei sottospazi k-dimensionali di R^n nello spazio delle matrici simmetriche di ordine n. Sottogruppi ad un parametro. Definizione dell'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie. Esempio: esponenziale di matrici. Differenziabilità e naturalità dell'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie. Il Teorema del sottogruppo chiuso. Campi vettoriali fondamentali su una varietà generati da un'azione di un gruppo di Lie.

Teoria degli spazi omogenei Riemanniani. Varietà Riemanniane omogenee. Esempi. Rappresentazione di isotropia e relazione con la rappresentazione aggiunta. Richiamo sull'integrazione su varietà orientate. Ogni rappresentazione di un gruppo di Lie compatto è una rappresentazione ortogonale rispetto ad un opportuno prodotto scalare. Criterio di esistenza di metriche Riemanniane invarianti su uno spazio omogeneo. Teorema di esistenza di metriche bi-invarianti su gruppi di Lie compatti. Spazi omogenei con rappresentazione di isotropia irriducibile. Campi di Killing e loro caratterizzazioni. Spazi omogenei riduttivi. Riduttività degli spazi omogenei Riemanniani. Formula di Nomizu per la curvatura di uno spazio Riemanniano omogeneo. Spazi omogenei naturalmente riduttivi e relativa caratterizzazione in termini di geodetiche. Metriche normali, Teorema di Samelson. Metriche invarianti su gruppi di Lie; esempio: modello di spazio iperbolico come gruppo di Lie. Geodetiche omogenee.

Campi di Killing su varietà Riemanniane compatte. Teorema di Stokes. Teorema della divergenza. Cenno al Teorema di Myers-Steenrod sul gruppo delle isometrie di una varietà Riemanniana. Dimensione massima del gruppo delle isometrie. Campi di Killing su varietà compatte: Teorema di Bochner. Applicazione al caso omogeneo; ogni varietà Riemanniana connessa, omogenea, compatta, con Ricci semidefinito negativo è un toro piatto. Campi di Killing su varietà compatte a curvatura positiva: Teorema di Berger.

L’applicazione esponenziale e i campi di Jacobi. Richiami sulle geodetiche, lemma di riscalamento. L'applicazione esponenziale di una varietà Riemanniana e relative proprietà fondamentali. Ogni isometria locale è determinata dall’immagine di un punto e dal suo differenziale nello stesso punto. Intorni normali, sfere geodetiche. Completezza geodetica degli spazi omogenei Riemanniani. Campi di Jacobi. Legame tra campi di Killing e campi di Jacobi. Teorema di esistenza ed unicità per i campi di Jacobi. Stima della dimensione dell'algebra di Lie dei campi di Killing.

Spazi simmetrici Riemanniani. Simmetrie geodetiche. Isometrie involutive con un punto fisso isolato. Definizione di spazio simmetrico Riemanniano. Esempi di spazi simmetrici: spazio Euclideo, sfere, gruppi di Lie dotati di metrica biinvariante, varietà di Grassmann. Ogni spazio simmetrico è omogeneo. Decomposizione di Cartan di un'algebra di Lie rispetto ad un automorfismo involutivo e relative proprietà. Struttura degli spazi

	simmetrici Riemanniani. Costruzione di uno spazio simmetrico Riemanniano G/H a partire da un automorfismo involutivo del gruppo G. Formula per la curvatura di uno spazio simmetrico Riemanniano G/H e legame tra il tensore di Ricci e la forma di Killing dell'algebra di Lie di G. Spazi simmetrici di tipo compatto e tipo non compatto: segno delle curvature sezionali nei due casi. Spazi localmente simmetrici. Teorema di Cartan sull'esistenza di isometrie locali tra spazi localmente simmetrici. Intorni uniformemente normali di un punto. Versione globale del Teorema di Cartan. Classificazione delle space forms (Teorema di Hopf). Ogni spazio localmente simmetrico, completo e semplicemente connesso è uno spazio simmetrico. Teorema di decomposizione di uno spazio simmetrico semplicemente connesso (senza dimostrazione).
Testi di riferimento	-F. Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, Berlin 1983. -J.M. Lee: Riemannian manifolds. Graduate Texts in Mathematics 176, Springer-Verlag, New York, 1997. -B. O'Neill: Semi-Riemannian geometry. Academic Press, San Diego, 1983. -M. Postnikov: Geometry VI. Riemannian geometry. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 91, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
Note ai testi di riferimento	
Materiali didattici	

Risultati di apprendimento previsti (secondo i Descrittori di Dublino)	
DD1 Conoscenza e capacità di comprensione	Acquisizione di concetti fondamentali della geometria moderna su varietà Riemanniane. Acquisizione delle relative tecniche dimostrative.
DD2 Conoscenza e capacità di comprensione applicate	Le conoscenze teoriche acquisite forniscono il linguaggio tecnico necessario in diversi ambiti della fisica teorica.
DD3-5 Competenze trasversali	*DD3 Autonomia di giudizio*: Capacità di comprendere e rielaborare dimostrazioni di risultati matematici significativi. Attitudine a testare alcuni fatti di carattere generale su esempi specifici.
	DD4 Abilità comunicative: Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato, necessario per la consultazione e comprensione dei testi, l'esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi.
	DD5 Capacità di apprendere: Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato dalla consultazione dei testi e rielaborazione personale delle tecniche proposte durante le lezioni.

Metodi didattici	
	Lezioni frontali in aula

Valutazione	
Modalità di verifica dell'apprendimento	Colloquio orale
Criteri di valutazione	● *Conoscenza e capacità di comprensione*: Conoscenza di nozioni fondamentali di Geometria Riemanniana, dei risultati rilevanti della teoria e delle relative dimostrazioni. ● *Conoscenza e capacità di comprensione applicate*: Saper applicare tecniche generali a classi particolarmente significative di varietà Riemanniane, quali i gruppi di Lie e gli spazi omogenei, ad esempio per quel che concerne il calcolo della curvatura e la determinazione delle geodetiche.

	● *Autonomia di giudizio*: Capacità di ragionamento critico sugli argomenti sviluppati a lezione, capacità di sviluppare in modo autonomo alcune dimostrazioni. ● *Abilità comunicative*: Capacità di esporre concetti e dimostrazioni in modo chiaro, coerente ed esaustivo. ● *Capacità di apprendere*: Competenza nell'impiego del formalismo e degli strumenti fondamentali (ad es. calcolo tensoriale) per lo studio della geometria delle varietà Riemanniane.
Criteri di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale	Il voto finale è attribuito in trentesimi, sulla base della qualità dell'esposizione da parte del candidato di alcuni tra i concetti ed i risultati chiave del corso, tenendo anche conto della capacità di stabilire connessioni tra le varie parti del programma e la conoscenza di esempi significativi. L'esame si intende superato quando il voto è maggiore o uguale a 18.

Ulteriori informazioni	