

Esame di Matematica Discreta

Laurea Triennale in Informatica

A. Lotta

22/2/2023

1. a) Dare la definizione di insieme finito e di insieme infinito.
b) Dimostrare che, se A e B sono insiemi finiti equipotenti, allora A e B hanno la stessa cardinalità.

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$\sum_{k=1}^n \frac{5-2k}{3} = \frac{4n-n^2}{3}.$$

3. Stabilire quante sono le funzioni ingettive

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

tali che 5 non abbia alcuna preimmagine.

4. Risolvere il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{19} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$$

e determinarne la più piccola soluzione positiva.

5. Si consideri la permutazione $f \in S_9$:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 2 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare la decomposizione in cicli disgiunti di f^3 .
- b) Stabilire se il gruppo ciclico $G = \langle f \rangle$ ammette sottogruppi di ordine 5 e se ammette sottogruppi di ordine 3. Di tali sottogruppi determinare esplicitamente tutti gli elementi.

6. Stabilire se la sequenza

$$(6, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2)$$

è grafica, e in caso affermativo disegnare un grafo che la realizza.