

Esame di Matematica Discreta

Laurea Triennale in Informatica

A. Lotta

20/1/2023

1. a) Dare la definizione di anello e la definizione di elemento invertibile di un anello.
b) Dimostrare che, se $(A, +, \cdot)$ è un anello, e a e b sono elementi invertibili di A , allora anche $a \cdot b$ è invertibile.
c) Dopo aver definito le operazioni $+: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $\cdot: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, dimostrare che $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un anello.

2. Assegnate le funzioni

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad g: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$f(x, y) = \left(\frac{xy+1}{2}, \frac{xy-1}{3} \right), \quad g(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{3} \right)$$

verificare che una sola di esse è bigettiva. Di tale funzione determinare esplicitamente l'inversa.

3. Risolvere la congruenza lineare

$$72x \equiv 76 \pmod{74}$$

e determinarne una soluzione positiva. Stabilire, giustificando la risposta, se vi sono soluzioni x con $36 < x < 73$.

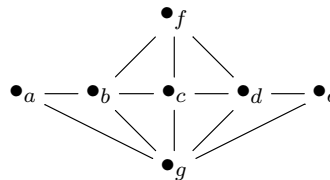
4. Dato un insieme A con $|A| = 12$, stabilire quante sono le funzioni surgettive $f: A \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ tali che 1 abbia esattamente 6 preimmagini.

5. Si consideri la permutazione $f \in S_7$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare l'ordine del gruppo $G = \langle f \rangle$ e stabilire se la permutazione inversa f^{-1} è generatore di G .

b) Determinare esplicitamente il sottogruppo H di G di ordine 3.

6. Stabilire se il grafo seguente ammette circuiti e/o cammini Euleriani e, in caso affermativo, determinarne uno.



Stabilire inoltre se esiste un albero avente la stessa sequenza grafica di tale grafo.