Esame di Matematica Discreta

Laurea Triennale in Informatica

A. Lotta

1/9/2023

1. Dimostrare che, fissato un intero $n \in \mathbb{N}$, la relazione binaria $\mathcal{R}$ su $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ a \equiv b \bmod n\}$$

è una relazione di equivalenza.

2. Stabilire che esattamente una delle seguenti funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è ingettiva, mentre l'altra non lo è:

$$f(x) := (x-1)(x-2), \quad g(x) := (x+1)(x+2).$$

Data inoltre una funzione $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ tale che

$$h(1/2) = 1, \quad h(-1/2) = 2,$$

stabilire che $f \circ h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ non è ingettiva.

3. Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1).$$

4. Stabilire se la seguente congruenza lineare

$$105x \equiv 21 \bmod 154$$

ammette soluzioni, ed in caso affermativo determinare tutte le soluzioni x tali che

$$0 \leq x < 154.$$

5. Considerata la permutazione $f \in S_8$ la cui inversa f^{-1} è la seguente:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

deteminare il periodo di f e determinare esplicitamente una permutazione g appartenente al sottogruppo $H =< f >$ generato da f, avente periodo 3.

6. È dato un albero G avente un vertice di grado 5, un vertice di grado 4, due vertici di grado 3 e i restanti vertici di grado minore.

   Stabilire quanti sono i vertici di grado uno di G.

   Disegnare due alberi soddisfacenti queste condizioni, il primo dei quali privo di vertici di grado 2 e l'altro con tre vertici di grado 2.