

## Esame di Matematica Discreta

Laurea Triennale in Informatica

A. Lotta

16/11/2023

1. Dare la definizione di elemento invertibile di un monoide. Dimostrare poi che la struttura algebrica  $(\mathbb{N}, *)$  la cui operazione interna è definita ponendo:

$$m * n = 2mn + m + n \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

è un monoide in cui l'unico elemento invertibile è 0.

2. Posto  $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ , si considerino le funzioni  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$  e  $g : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  definite da:

$$f(n) := 2^{-n}, \quad g(x) := \frac{x+3}{x+2}.$$

Stabilire se la funzione  $g \circ f$  è iniettiva e se è surgettiva.

3. Ad un torneo di calcio partecipano 5 squadre italiane e 5 inglesi. Nella prima fase è previsto che ogni squadra disputi una sola partita con un'altra squadra di nazionalità diversa, estratta a caso e viene pubblicato un tabellone con questi incontri.

Quanti sono i tabelloni possibili?

4. Risolvere il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 13 \pmod{17} \\ x \equiv 5 \pmod{15} \end{cases}$$

e determinarne la più piccola soluzione positiva.

5. Si consideri la permutazione  $f \in S_9$ :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Determinare esplicitamente tutti i sottogruppi del gruppo ciclico  $G = \langle f \rangle$ .

6. Stabilire se il grafo seguente ammette circuiti Euleriani e, in caso affermativo, determinarne uno:

