Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
Sede di Taranto
28/9/2005

1. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c\}$, determinare tutte le applicazioni surgettive $f : A \to B$ tali che

$$f(2) = f(3) = a$$
$$f(x) \neq a \quad per \ x \notin \{2, 3\}.$$

2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 5x \equiv 40 \mod 10 \\ x \equiv 50 \mod 7 \end{cases}$$

Determinare inoltre la più grande soluzione negativa $x_0 \in \mathbb{Z}$.

3. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, *)$ dove

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \quad m * n := -2mn.$$

Stabilire se $(\mathbb{Z}, *)$ è un monoide.

4. Determinare il MCD monico tra i polinomi $p = x^4 + 5x^2 + 4x + 5$ e $g = 2x^3 + 5x^2 + x + 5$ di $\mathbb{Z}_7[x]$.

5. Stabilire, giustificando la risposta, che esattamente uno tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{Z}_{10}$ è un sottogruppo:

$H_1 = \{[0], [1], [2], [3]\}$, $H_2 = \{[0], [2], [4], [6], [8]\}$, $H_3 = \{[0], [3], [5], [7], [9]\}$.

Di tale sottogruppo determinare tutti i generatori.

6. a) Determinare un elemento primitivo del campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$.

b) Determinare, se esiste, un omomorfismo di gruppi $f : \mathbb{Z}_5^* \to \mathbb{Z}$ tale che

$$f(4) = -6.$$

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
23/2/2005

1. Si ponga $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Elencare tutte le relazioni di equivalenza $\mathcal{R}$ su X verificanti le condizioni seguenti:

a) $1\mathcal{R}2$
b) $5\mathcal{R}2$
c) 6 è in relazione solo con sé stesso.

2. Risolvere la congruenza lineare

$$315x \equiv 18 \mod 153.$$

Determinare inoltre una soluzione x_0 tale che

$$20 < x_0 < 60.$$

3. Si considerino le permutazioni $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ e $g = (5\,3)(2\,6)$ di S_7.

1) Calcolare il periodo di f e di $f \circ g$.

2) Posto $H =< f >$, determinare, se esistono, un sottogruppo di K di H di ordine 3 ed un sottogruppo S di H di ordine 4.

4. Stabilire se il polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$

$$f = x^3 - 14x^2 - 14x - 15$$

è riducibile.

5. Determinare tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ e tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_3$.

6. Determinare un elemento primitivo del campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ e trovare tutti gli elementi di periodo 2 del gruppo $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$. Calcolare infine l'inverso di $[3]$.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
9/2/2005

1. Si ponga $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq \frac{1}{2}\}$.
1) Stabilire se X è un sottomonoide di $(\mathbb{Q}, \cdot)$.
2) Stabilire se l'applicazione $f : X \to \mathbb{Q}$ tale che

$$\forall x \in X \quad f(x) = \frac{x-5}{2x-1}$$

è ingettiva e se è surgettiva.

2. Risolvere il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 7 & \mod 5 \\ x \equiv -1 & \mod 3 \end{cases}$$

Determinare inoltre una soluzione pari x_o e una soluzione dispari x_1.

3. Si considerino le permutazioni $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ e $g = (1\,5\,3)(2\,6)$.
1) Calcolare il periodo di f e di $f \circ g$.
2) Posto $H =< f >$, determinare tutti i generatori di H.
3) Determinare, se esiste, un omomorfismo $F : \mathbb{Z} \to H$ la cui immagine $Im(F)$ sia un sottogruppo di H di ordine 3, e tale che

$$F(2) = (1\,5\,3).$$

4. Calcolare in $\mathbb{Z}_3[x]$ un MCD monico tra i polinomi $p = x^4 + x^3 + 2x + 2$ e $q = x^2 + x$.

5. Si consideri il sottogruppo $S =< 5 >$ di $\mathbb{Z}_{30}$.
1) Verificare che $(S, \cdot\,)$ ha l'elemento neutro;
2) Dire se $(S, +, \cdot\,)$ è un campo.

6. Un albero ha 6 vertici, di cui uno di grado 5 e i rimenti tutti di grado $x \geq 1$. Calcolare x.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
25/1/2005

1. Dati gli insiemi $A = \{x, y, z, t\}$ e $B = \{a, b, c\}$, stabilire quante sono le applicazioni surgettive $A \to B$ per le quali l'elemento $a \in B$ ha due preimmagini in A.

2. Determinare due soluzioni x_o e x_1 incongure modulo 40 della congruenza lineare

$$504x \equiv 56 \mod 40.$$

3. Posto $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$, si consideri la struttura algebrica $(X, *)$ la cui operazione interna è definita da:

$$a * b := -\frac{3}{2}ab.$$

Stabilire se $(X, *)$ è un gruppo.

4. Determinare il sottogruppo di H di $\mathbb{Z}_8$ di ordine 4 ed il sottogruppo K di $\mathbb{Z}_{12}$ con lo stesso ordine.

Detto poi $f : H \to K$ l'omorfismo tale che

$$f([2]_8) = [9]_{12}$$

stabilire se f è un isomorfismo.

5. Stabilire se il polinomio $f = 6x^4 + 15x^3 + 10$ ha radici in $\mathbb{Q}$. Tale polinomio è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$?

6. Stabilire se l'anello $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x + 1)$ è un campo.

Prova scritta di Matematica Discreta
Informatica e Comunicazione Digitale-sede di Taranto
12/1/05

Es 1: Giustificare la validità della seguente congruenza:

$$37^{17} \equiv 2(\text{mod}5).$$

Es 2: Risolvere la seguente congruenza lineare:

$$164x \equiv 57(\text{mod}55).$$

Determinare inoltre la più piccola soluzione positiva e dire se vi sono soluzioni congrue a 45 mod 55.

Es 3: Si consideri l'insieme $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
i) Data la relazione $\mathcal{R}$ su X definita da

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a + b \text{ è pari}$$

verificare che è una relazione di equivalenza e determinare l'insieme quoziente $X/\mathcal{R}$.
ii) Elencare tutte le relazioni di equivalenza su X verificanti le condizioni seguenti:

4 è in relazione con 5 e 6
7 è in relazione con 5

2 e 3 non sono in relazione tra loro.

Es 4: Determinare tutti i generatori del gruppo cicilico $\mathbb{Z}_{10}$ e determinare il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{10}$ di ordine 5.

Es 5: Calcolare il MCD monico tra i polinomi di $\mathbb{Z}_3[x]$:

$$p = x^3 + 2x^2 + x + 2, q = x^4 + 2x^3 + 2x + 1.$$

Es 6: Verificare che l'anello $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$ non è un campo. Stabilire poi se l'elemento $[x^3]$ di tale anello è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
7/9/2005

1. Si ponga $X = \{1, 2, \dots, 8\}$. Determinare quante sono le relazioni di equivalenza su X per le quali $\{1, 2, 3\}$ è una classe di equivalenza, mentre $\{5, 6\}$ non lo è.

2. Giustificare la congruenza:

$$(215437)^{29} \equiv 2 \mod 5.$$

3. Si consideri il campo $K = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$.

a) Calcolare $[x^4 + 1] \cdot [x]^{-1}$.

b) Determinare tutti gli isomorfismi del gruppo $(K^*, \cdot)$ in sè.

4. Dimostrare che il polinomio di $\mathbb{Q}[x]$

$$f = -x^4 + 2x^2 + x + 1$$

è irriducibile.

5. a) Determinare il sottogruppo H di $\mathbb{Z}_{12}$ di ordine 4 e tutti i generatori di H.

b) Data la permutazione $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, dire se H e $< f >$ sono gruppi isomorfi.

6. Determinare due soluzioni incongrue modulo 27 della congruenza lineare:

$$36x \equiv 24 \quad \mod 27.$$

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
21/2/2006

1. Risolvere la congruenza

$$31x \equiv 7 \bmod 19.$$

e determinarne la più piccola soluzione positiva.

2. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, *)$ la cui operazione interna $*$ è definita nel modo seguente:

$$a * b = a + b + \frac{1}{2}ab.$$

a) Stabilire che $(\mathbb{Q}, *)$ è un monoide;

b) Mostrare che $(\mathbb{Q}, *)$ non è un gruppo.

3. Si ponga $X := \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Dire, giustificando la risposta, quante sono le applicazioni ingettive $f : X \to Y$ tali che

$$f(c) = 1, \quad f(a) < 4.$$

4. a) Determinare il sottogruppo H di $\mathbb{Z}_{18}$ di ordine 6 e tutti i generatori di H;

b) Stabilire quanti sono, se esistono, gli omomorfismi surgettivi $\mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_9$ e gli omomorfismi surgettivi $\mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_8$.

5. Si consideri il campo $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ e si ponga $a := [9]_{11}$.

a) Calcolare l'inverso di a;

b) Calcolare il periodo di a nel gruppo $(\mathbb{K}^*, \cdot)$.

6. Risolvere in $\mathbb{Z}_3[x]$ la congruenza

$$(x^2 + 1)f = 2x \quad \bmod (2x + 1).$$

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
7/2/2006

1. Risolvere la congruenza

$$5x \equiv (54321)^{33} \bmod 11.$$

2. Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su $\mathbb{Z}$ definita da

$$x\mathcal{R}\, y \iff 7|(8x + 13y).$$

a) Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza;
b) Determinare tutti gli elementi della classe $[-1]_{\mathcal{R}}$.

3. Si considerino le permutazioni di S_8:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che $H = \{Id, f, g, h\}$ è un sottogruppo di S_8.
b) Stabilire se H è un gruppo ciclico.

4. a) Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{15}$;
b) Determinare l'omomorfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{15}$ tale che

$$f(7) = [6]_{15}$$

e stabilire se è surgettivo.

5. Calcolare l'inverso di [17] nel campo di $\mathbb{Z}_{19}$.
Sapendo inoltre che [2] è un elemento primitivo, dire, giustificando la risposta, quali dei seguenti sono elementi primitivi di $\mathbb{Z}_{19}$:

$$a = [8], b = [2^5], c = [2^9].$$

6. Si consideri il campo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$.
a) Dire quanti elementi ha $\mathbb{K}$ ed elencarli;
b) Scrivere la tabella dell'addizione e della moltiplicazione di $\mathbb{K}$.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
23/1/2006

1. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, *)$ la cui operazione $*$ è definita nel modo seguente

$$(a, b) * (x, y) := (ax, ay + b).$$

Verificare che $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, *)$ è un monoide.

2. Risolvere il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 15 & \mod 81 \\ x \equiv 0 & \mod 7 \end{cases}$$

Determinare inoltre una soluzione pari x_o e una soluzione dispari x_1.

3. Si consideri la permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare f^{27}.

b) Determinare, se esistono, i sottogruppi di $< f >$ di ordine 2, 3 e 4.

4. Si considerino gli insiemi $X = \{1, 2, \ldots, 7\}$ e $Y = \{a, b, c\}$. Stabilire quante sono le applicazioni surgettive $f : X \to Y$ verificante la condizione seguente: gli elementi di X la cui immagine mediante f è a oppure b sono esattamente quattro.

5. a) Stabilire se il polinomio f di $\mathbb{Q}[x]$:

$$f = x^3 + 5x^2 - 4x + 12$$

è irriducibile;

b) Determinare il MCD monico tra f e $g = 2x^3 + 12x^2 + 2x + 12$.

6. Si consideri l'anello $End(\mathbb{Z}_4) = \{0, f, g, h\}$ degli endomorfismi del gruppo $\mathbb{Z}_4$, dove f, g, h sono determinati da:

$$f([1]) = [1],\ g([1]) = [2],\ h([1]) = [3].$$

a) Scrivere la tabella dell'addizione e della moltiplicazione di tale anello;

b) Stabilire se $End(\mathbb{Z}_4)$ è un campo.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
12/1/2006

1. Si considerino le applicazioni

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$$

definite nel modo seguente:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad g(x) = [x + 1]_6.$$

a) Stabilire se f è ingettiva o surgettiva;

b) Determinare una preimmagine $x \in \mathbb{Z}$ mediante g dell'elemento $[-13]_6$ di $\mathbb{Z}_6$, con $x > 0$.

2. Determinare la più piccola soluzione positiva della congruenza lineare

$$792x \equiv -81 \mod 135.$$

3. Si consideri la permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 4 & 6 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posto $H =< f >$, stabilire quali delle seguenti permutazioni appartengono ad H:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 6 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Si consideri l'insieme $X = \{1, 2, \ldots, 11\}$. Stabilire quante sono le relazioni di equivalenza su X verificanti le condizioni seguenti:

a) I numeri pari di X sono tutti in relazione tra loro;

b) L'elemento 1 è in relazione con esattamente sei elementi di X.

5. a) Determinare tutti i generatori e tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{16}$;

b) Detto K il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{16}$ di ordine 4 ed H il sottogruppo di $\mathbb{Z}_8$ avente lo stesso ordine, determinare tutti gli isomorfismi $H \to K$.

6. Stabilire se l'elemento $z = [2x^3 + x^2 + x]$ è primitivo nel campo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + 2x + 2)$.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
5/6/2006

1. Si ponga $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 3\}$.
1) Stabilire se X è un sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$.
2) Stabilire se l'applicazione $f : X \to \mathbb{Q}$ tale che

$$\forall x \in X \quad f(x) = \frac{x}{x-3}$$

è ingettiva e se è surgettiva.

2. Risolvere il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \mod 7 \\ x \equiv -1 & \mod 3 \end{cases}$$

3. Si considerino le permutazioni $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ e $g = (2\,4\,3)(5\,6)$.
1) Calcolare il periodo di f e di $f \circ g$.
2) Posto $H =< g >$, stabilire quanti sono gli omomorfismi $F : \mathbb{Z}_3 \to H$.

4. Calcolare in $\mathbb{Z}_5[x]$ il MCD monico tra i polinomi $p = x^4 + x^3 + 2x + 2$ e $q = x^2 + x$.

5. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{27}$. Detto H il sottogruppo di ordine 9, determinare tutti i generatori di H.

6. Determinare l'inverso di $a = [9]$ nel campo $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
6/11/2006

1. Si ponga $X = \{a, b, c, d, e\}$.

a) Calcolare il numero delle relazioni di equivalenza su X.

b) Stabilire quante sono le relazioni di equivalenza su X per le quali $\{a, b\}$ è una classe di equivalenza.

2. Risolvere la congruenza lineare:

$$6x \equiv 9 \bmod 315$$

e determinare tre soluzioni positive x_1, x_2, x_3 a due a due incongrue module 315.

3. Si considerino le seguenti operazioni su $\mathbb{Q}$:

$$x * y = -7(x + y)$$

$$x \otimes y = -7xy.$$

Dire, giustificando la risposta, quale delle strutture algebriche $(\mathbb{Q}, *)$ e $(\mathbb{Q}, \otimes)$ è un monoide.

4. a) Determinare tutti i sottogruppi e tutti i generatori di $\mathbb{Z}_{25}$.

b) Stabilire quanti sono gli omomorfismi $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{25}$.

5. Dimostrare che il polinomio $p = x^4 - 3x + 1$ di $\mathbb{Q}[x]$ è irriducibile.

6. Si verifichi che 3 è un elemento primitivo del campo $\mathbb{Z}_{17}$.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
25/9/2006

1. Si ponga $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$.

a) Calcolare il numero delle applicazioni surgettive $f : X \to Y$.

b) Stabilire quante sono le applicazioni surgettive $f : X \to Y$ tali che i numeri dispari di X abbiano tutti la stessa immagine mediante f.

2. Risolvere il sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 7x \equiv 1 & \mod 9 \\ 7x \equiv 1 & \mod 5 \end{cases}$$

3. Si consideri l'anello $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.

a) Mostrare che $\mathbb{K}$ è un campo.

b) Dire quanti elementi ha $\mathbb{K}$.

c) Calcolare $a = [x^2 + 1] \cdot [x + 1]$ e il suo inverso a^{-1}.

4. Determinare in $\mathbb{Z}_{11}[x]$ il MCD monico tra i polinomi

$$p = x^3 + 3x^2 + 2x,\ q = x^2 + 10x + 9.$$

5. a) Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_8$.

b) Determinare tutti i generatori del sottogruppo $H = \{[0], [2], [4], [6]\}$.

6. È data la permutazione $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare f^{27}.

b) Posto $G =< f >$, verificare che

$$K = \{(475), (457), Id\}$$

è un sottogruppo di G.

Esame di Matematica Discreta
Laurea Triennale in Informatica e Comunicazione Digitale
12/9/2006

1. Si ponga $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 3\}$.
1) Stabilire se X è un sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$.
2) Stabilire se l'applicazione $f : X \to \mathbb{Q}$ tale che

$$\forall x \in X \quad f(x) = \frac{x}{x-3}$$

è ingettiva e se è surgettiva.

2. Risolvere il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \mod 7 \\ x \equiv -1 & \mod 3 \end{cases}$$

3. Si considerino le permutazioni $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ e $g = (2\,4\,3)(5\,6)$.
1) Calcolare il periodo di f e di $f \circ g$.

2) Posto $H =< g >$, determinare tutti gli omomorfismi $F : \mathbb{Z}_3 \to H$. Per ciascuno di essi, stabilirne la eventuale ingettività e/o surgettività.

4. Calcolare in $\mathbb{Z}_5[x]$ il MCD monico tra i polinomi $p = x^4 + x^3 + 2x + 2$ e $q = x^2 + x$.

5. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{27}$. Detto H il sottogruppo di ordine 9, determinare tutti i generatori di H.

6. Determinare l'inverso di $a = [9]$ nel campo $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$. Stabilire inoltre se l'elemento $b = [3]$ è primitivo.