

Raccolta di esercizi per gli studenti di **GEOMETRIA - Cdl Fisica**
Università di Bari
A. Lotta
A.A. 2025-26

1. Sia $(X, *)$ una struttura algebrica. Si assuma che $*$ sia associativa e dotata di elemento neutro e . Verificare che l'insieme $I \subset X$ di tutti gli elementi invertibili è un sottoinsieme stabile (chiuso) rispetto a $*$.
2. Posto $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, stabilire che la struttura algebrica $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ la cui operazione interna è definita come segue:

$$(a, b, c) * (a', b', c') := (aa', bb', ac' + cb')$$

è un gruppo non abeliano.

3. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da

$$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

è stabile rispetto alla somma e alla moltiplicazione standard, e che, rispetto alle operazioni indotte $(K, +, \cdot)$ è un campo.

4. Verificare in dettaglio la validità degli assiomi di spazio vettoriale per quel che concerne gli esempi: $V_1 \times V_2$ (prodotto diretto degli spazi vettoriali V_1 e V_2) e V^X (spazio delle funzioni dall'insieme X nello spazio vettoriale V), e lo spazio vettoriale $M_{m,n}(\mathbb{K})$ delle matrici di tipo $m \times n$.
5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$F_{a,b}(x, y) := (ax - by, bx + ay).$$

Posto

$$K = \{F_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\},$$

mostrare che $(K, +, \circ)$ è un campo, dove $+$ è l'operazione di somma tra funzioni in $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2}$ e l'operazione di prodotto $\circ$ è l'usuale composizione di funzioni.