

Appunti per gli studenti del corso di Geometria

Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2025/26

A. Lotta

1. NOZIONI DI BASE

La geometria analitica permette di trattare questioni geometriche utilizzando il linguaggio algebrico. Così $\mathbb{R}$ fornisce un modello universale di “retta euclidea”, mentre $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il modello categorico di “piano euclideo”. In ultima analisi, ciò che tale identificazione permette è la manipolazione e lo studio degli oggetti geometrici mediante le operazioni fondamentali tra numeri reali: somma, prodotto, differenza, passaggio al reciproco. In tale procedimento sono di basilare importanza le proprietà formali di queste operazioni. Su di esse si basa la nozione generale di *campo*, che sarà discussa in questo paragrafo.

Consideriamo un insieme X su cui sia definita un’**operazione interna** $*$, ovvero una legge che associa univocamente ad ogni coppia ordinata (x, y) di elementi di X , un ben preciso elemento dello stesso insieme, denotato con $x * y$. In tal caso diremo che $(X, *)$ è una **struttura algebrica**.

A priori, quindi, l’ordine in cui si considerano gli oggetti x e y è importante ai fini di determinare il risultato dell’operazione $*$ applicata ad essi. In altri termini, gli oggetti $x * y$ e $y * x$ possono differire.

Se $*$ è un’operazione su X , la coppia $(X, *)$ prende il nome di **struttura algebrica**.

Osservazione 1.1. Osserviamo che un’operazione interna $*$ sull’insieme X altro non è che una funzione (applicazione) $*$: $X \times X \rightarrow X$, il cui dominio è il prodotto cartesiano $X \times X = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ e il cui insieme di arrivo è lo stesso insieme X .

Più in generale, si possono considerare strutture algebriche $(X, *_1, \dots, *_k)$ dove $*_1, \dots, *_k$ sono $k \geq 1$ operazioni diverse su X .

ESEMPIO 1.2. Sono operazioni interne la somma $+$ ed il prodotto $\cdot$ standard sugli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Quindi, ad esempio, sono strutture algebriche $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, ma anche $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ oppure $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (strutture con due operazioni).

Fissiamo ora un po' di terminologia di uso corrente. Si dice che l'operazione $*$ sull'insieme X gode della proprietà **commutativa** se:

$$\forall x, y \in X \quad x * y = y * x.$$

L'operazione $*$ è detta **associativa** se per ogni $x, y, z \in X$ risulta:

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

In questo caso, è possibile scrivere, senza ambiguità:

$$x * y * z.$$

Diremo che struttura algebrica $(X, *)$ ammette **elemento neutro**, se esiste un elemento $e \in X$ tale che:

$$x * e = x = e * x$$

per ogni $x \in X$.

Un tale oggetto, se esiste, è sempre univocamente determinato. Infatti, ammettendo che e ed e' siano entrambi elementi neutri, risulta necessariamente:

$$e = e * e' = e'.$$

La prima uguaglianza è giustificata dal fatto che e' è elemento neutro, la seconda dal fatto che e gode della stessa proprietà.

I più familiari esempi di elementi neutri sono il numero 0 nel caso degli insiemi numerici $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, ecc. ed il numero 1, laddove si consideri la moltiplicazione invece della somma.

ESEMPIO 1.3. Dato un insieme A , possiamo considerare sull'insieme delle parti (cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi) $\mathcal{P}(A)$ di A le operazioni fondamentali di intersezione e unione che danno luogo a due differenti strutture algebriche: $(\mathcal{P}(A), \cap)$ e $(\mathcal{P}(A), \cup)$ e in entrambi i casi sussiste la proprietà associativa. Si noti che la prima di queste strutture ammette l'intero insieme A come elemento neutro, mentre per la seconda tale ruolo è svolto dall'insieme vuoto $\emptyset$.

ESEMPIO 1.4. Dato un insieme A , consideriamo l'insieme A^A di tutte le funzioni (applicazioni) da A in A . Questo insieme è dotato della fondamentale operazione di composizione

$$(f, g) \mapsto f \circ g.$$

Ricordiamo che $f \circ g : A \rightarrow A$ è la funzione definita ponendo

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

per ogni $x \in A$.

L'operazione di composizione $\circ$ tra funzioni è *sempre associativa*, ma *non* è (di norma) commutativa.

La funzione identica $Id_A : A \rightarrow A$ (definita com'è noto da $Id_A(x) := x$ per ogni $x \in A$), è l'elemento neutro di $(A^A, \circ)$, avendosi infatti, per ogni funzione $f : A \rightarrow A$, che

$$f \circ Id_A = f = Id_A \circ f.$$

In presenza di un elemento neutro e per una struttura algebrica $(X, *)$, un elemento $x \in X$ è detto **invertibile** se in corrispondenza di esso esiste un altro $x' \in X$, detto *inverso di* x , per cui si abbia:

$$x * x' = e = x' * x.$$

Si dice anche che x **ammette un inverso** in X .

Considerato ad esempio l'insieme dei numeri reali, ogni numero $x \neq 0$ è un elemento invertibile di $(\mathbb{R}, \cdot)$, con inverso $\frac{1}{x}$. Invece ogni numero reale x è un elemento invertibile di $(\mathbb{R}, +)$, con inverso $-x$.

ESEMPIO 1.5. Consideriamo ancora un insieme non vuoto A e la struttura algebrica $(A^A, \circ)$. Data una funzione $f : A \rightarrow A$, essa è un elemento invertibile di $(A^A, \circ)$ se e solo se esiste una funzione $g : A \rightarrow A$ tale che:

$$f \circ g = Id_A, g \circ f = Id_A.$$

Questo significa che per ogni $x \in A$ deve aversi

$$g(f(x)) = x$$

e anche:

$$f(g(y)) = y,$$

sempre per ogni $y \in A$.

Allo studente è già noto che condizione necessaria e sufficiente affinché ciò sia possibile è che f sia una funzione *bigettiva*, ovvero sia iniettiva che surgettiva. La funzione $g : A \rightarrow A$ è la funzione inversa $g = f^{-1}$ della bigezione f , che associa ad ogni $y \in A$ l'unico elemento x dello stesso insieme, tale che $f(x) = y$.

In tal caso quindi abbiamo a disposizione una caratterizzazione completa degli elementi invertibili della struttura algebrica $(A^A, \circ)$ in esame.

Teorema 1.6. *Sia $(X, *)$ un struttura algebrica, dotata di elemento neutro e , la cui operazione $*$ è associativa. Se $x \in X$ è un elemento invertibile, allora l'inverso x' di x è univocamente determinato.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che x' e x'' siano entrambi inversi di x . Allora in particolare abbiamo

$$x * x' = e.$$

Applicando l'operazione $*$, “componendo” ambo i membri a sinistra con x'' si ottiene:

$$x'' * (x * x') = x'' * e$$

4

ovvero

$$x'' * (x * x') = x''$$

che si può riscrivere, stante la proprietà associativa:

$$(x'' * x) * x' = x''.$$

D'altra parte, per definizione di inverso, sappiamo anche che $x'' * x = e$ e quindi l'ultima uguaglianza si riscrive:

$$e * x' = x''$$

da cui

$$x' = x''.$$

□